OBLIG 2, våren 2022
løsningsforslag

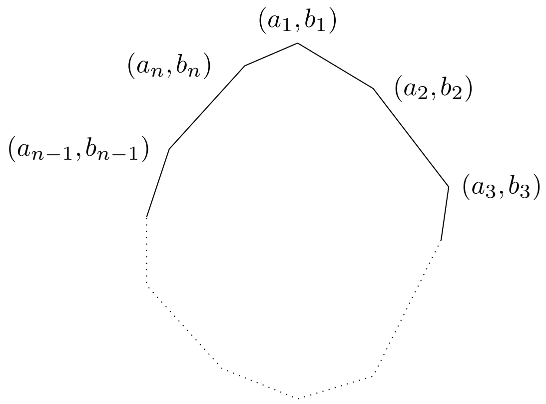
Oppgave 1. I denne oppgaven skal vi regne ut arealet av en n-kant C med hjørner

$$(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n)$$

Vi kaller linjestykket mellom (a_k,b_k) og (a_{k+1},b_{k+1}) for C_k, dvs. at vi har

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \cdots \cup C_n$$

hvor C_n er det siste linjestykket fra (a_n,b_n) til (a_1,b_1).



(a) La $\mathbf{F}(x,y) = -\frac{y}{2}\mathbf{i} + \frac{x}{2}\mathbf{j}$ og la $\mathbf{r}$ beskrive en parametrisering av C. Bruk Greens teorem til å forklare hvorfor absoluttverdien av integralet

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

beregner arealet av n-kanten.

> **Løsning.**
> Greens teorem gir
>
> $$|\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}| = \iint_P \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{2}) - \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{2})\,dx\,dy = \iint_P 1\,dx\,dy = \text{areal}(P)$$
>
> hvor P er mangekanten med C som rand. Vi bruker absoluttverdi for å slippe å ta hensyn til retningen på linjeintegralet.

(b) Vis at

$$\mathbf{r}_k(t) = (a_k + t(a_{k+1}-a_k))\,\mathbf{i} + (b_k + t(b_{k+1}-b_k))\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$$

gir en parametrisering av C_k. For det siste linjestykket C_n skriver vi for enkelthets skyld at $(a_1,b_1) = (a_{n+1},b_{n+1})$.

Løsning.
Vi har at

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_k(0) &= a_k\,\mathbf{i} + b_k\,\mathbf{j}\\ \mathbf{r}_k(1) &= (a_k + (a_{k+1} - a_k))\,\mathbf{i} + (b_k + (b_{k+1} - b_k))\,\mathbf{j}\\ &= a_{k+1}\,\mathbf{i} + b_{k+1}\,\mathbf{j}\end{aligned}$$

(c) Regn ut

$$\int_{C_k} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

og bruk dette til å regne ut arealet av n-kanten.

Løsning.
Vi har at

$$\begin{aligned}\int_{C_k} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \left(-\frac{b_k + t(b_{k+1} - b_k)}{2}\mathbf{i} + \frac{a_k + t(a_{k+1} - a_k)}{2}\mathbf{j}\right)\\ &\qquad \cdot ((a_{k+1} - a_k)\,\mathbf{i} + (b_{k+1} - b_k)\,\mathbf{j})\,dt\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (-b_k a_{k+1} + a_k b_k - t(b_{k+1} - b_k)(a_{k+1} - a_k)\\ &\qquad + a_k b_{k+1} - a_k b_k + t(b_{k+1} - b_k)(a_{k+1} - a_k))\,dt\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (-b_k a_{k+1} + a_k b_k + a_k b_{k+1} - a_k b_k)\,dt\\ &= \frac{1}{2}(a_k b_{k+1} - b_k a_{k+1})\end{aligned}$$

$$\text{areal}(P) = \frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}(a_k b_{k+1} - a_{k+1} b_k)\right|$$

(d) La C være trekanten med hjørner $(0,0)$, (a,h) og $(g,0)$. Bruk formelen i (c) til å vise at arealet av denne trekanten er $\frac{gh}{2}$.

Bruk samme metode til å vise at arealet av rektangelet gitt ved hjørner $(0,0)$, $(g,0)$, (g,h) og $(0,h)$ er gh.

Løsning.

$$\text{areal}(P_3) = \frac{1}{2}|0\cdot h + a\cdot 0 + g\cdot 0 - 0\cdot a - g\cdot h - h\cdot 0| = \frac{gh}{2}$$

$$\text{areal}(P_4) = \frac{1}{2}|0\cdot 0 + g\cdot h + g\cdot h + 0\cdot 0 - 0\cdot g - 0\cdot g - h\cdot 0 - h\cdot 0| = gh$$

Oppgave 2. (a) La A være den ortogonale 3×3-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

og la (x, y, z) være et punkt på enhetskula, dvs. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Vis at

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

også er et punkt på enhetskula.

> **Løsning.**
> Vi lar $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
>
> $$|A\mathbf{x}|^2 = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2 = 1$$

(b) La B være 3×3-matrisen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

og la $\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vis at $\mathbf{F}$ har et fikspunkt.

> **Løsning.**
>
> $$\begin{aligned} &|\nabla F_1(\mathbf{c}_1)|^2 + |\nabla F_2(\mathbf{c}_2)|^2 + |\nabla F_3(\mathbf{c}_3)|^2 \\ &\qquad = (\frac{1}{6})^2 + (-\frac{1}{6})^2 + (-\frac{1}{6})^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{6})^2 + (-\frac{1}{6})^2 \\ &\qquad = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{9}{36} + \frac{16}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{30}{36} < 1 \end{aligned}$$

(c) Finn fikspunktet til $\mathbf{F}$.

Løsning.

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y + 1 \\ -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}z \\ \frac{1}{6}y - \frac{1}{6}z + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

gir likningssettet

$$\begin{aligned} -\frac{5}{6}x - \frac{1}{6}y \qquad &= -1 \\ -\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}z &= 0 \\ \frac{1}{6}y - \frac{7}{6}z &= -1 \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} 5x + y \qquad &= 6 \\ x + 3y - 4z &= 0 \\ y - 7z &= -6 \end{aligned}$$

som har løsning $x = y = z = 1$.

Oppgave 3. En kvadratisk $n \times n$-matrise A kalles **ortogonal** dersom

$$A^T \cdot A = I$$

hvor A^T betegner den transponerte matrisen til A, og I er identitetsmatrisen. Siden determinanten er multiplikativ og $\det(A^T) = \det(A)$, følger det at for en ortogonal matrise A, så er $\det(A) = \pm 1$.

En affin avbildning $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} + \mathbf{b}$ kalles en **isometri** eller en **stiv bevegelse** dersom A er en ortogonal matrise.

(a) La f være en isometri i planet. Vis at f bevarer avstander, dvs.

$$|\mathbf{v} - \mathbf{w}| = |f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w})|$$

for alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$. (Det kan være nyttig å bruke matrise-formen for skalar-produktet, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}^T \mathbf{w}$).

Løsning.

$$
\begin{aligned}
|f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w})|^2 &= |A\mathbf{v} + \mathbf{b} - (A\mathbf{w} + \mathbf{b})|^2 \\
&= |A\mathbf{v} - A\mathbf{w}|^2 \\
&= |A(\mathbf{v} - \mathbf{w})|^2 \\
&= (\mathbf{v} - \mathbf{w})^T A^T A(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \\
&= (\mathbf{v} - \mathbf{w})^T (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \\
&= |\mathbf{v} - \mathbf{w}|^2
\end{aligned}
$$

La A være en ortogonal matrise med $\det(A) = -1$. Da vet vi at det finnes en egenvektor $\mathbf{w}$ for A med egenverdi 1, dvs. $A\mathbf{w} = \mathbf{w}$ eller ekvivalent $(A - I)\mathbf{w} = 0$. Årsaken er at vi har

$$
\det(A - I) = \det(A - AA^T) = \det(A)\det(I - A^T) = (-1)\cdot\det(I - A)
$$

og det følger at $\det(A - I) = 0$.

(b) La $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} + \mathbf{b}$ være en isometri med $\det(A) = -1$. Siden A er ortogonal vet vi at $A^2 = I$. La $\mathbf{w}$ være en egenvektor for A med egenverdi 1. Vis at $A\mathbf{b} + \mathbf{b}$ er en egenvektor for A med egenverdi 1, for alle valg av $\mathbf{b}$. Det følger av dette at $A\mathbf{b} + \mathbf{b} = s\mathbf{w}$ for en $s \in \mathbb{R}$.

Løsning.
Vi har

$$
A(A\mathbf{b} + \mathbf{b}) = A^2\mathbf{b} + A\mathbf{b} = \mathbf{b} + A\mathbf{b}
$$

Siden $\mathbf{w}$ er en basis for egenvektorene med egenverdi 1, følger det at

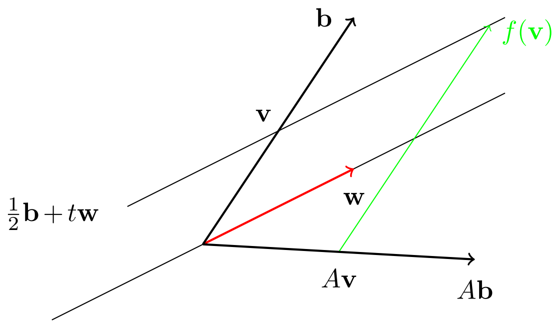
$$
A\mathbf{b} + \mathbf{b} = s\mathbf{w}
$$

(c) Vis at f avbilder linja gitt ved $\frac{1}{2}\mathbf{b} + t\mathbf{w}$ for $t \in \mathbb{R}$ på seg selv.

Løsning.

$$
\begin{aligned}
f(\frac{1}{2}\mathbf{b} + t\mathbf{w}) &= A(\frac{1}{2}\mathbf{b} + t\mathbf{w}) + \mathbf{b} \\
&= \frac{1}{2}A\mathbf{b} + tA\mathbf{w} + \mathbf{b} \\
&= \frac{1}{2}(s\mathbf{w} - \mathbf{b}) + t\mathbf{w} + \mathbf{b} \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{b} + (\frac{1}{2}s + t)\mathbf{w}
\end{aligned}
$$

som fortsatt ligger på den samme linja.



$\mathbf{b}$
$f(\mathbf{v})$
$\mathbf{v}$
$\frac{1}{2}\mathbf{b} + t\mathbf{w}$
$\mathbf{w}$
$A\mathbf{v}$
$A\mathbf{b}$