MAT 1110, våren 2022
MATLAB-eksempler

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Parametriserte kurver og flater

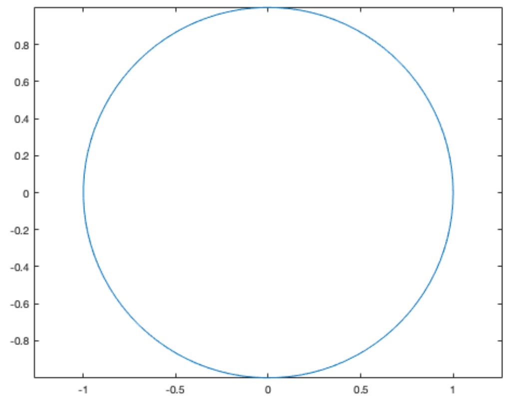
Den plane kurven

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

illustrerer vi på følgende måte:

```
t=linspace(0,2*pi,100);
x=cos(t);   y=sin(t);
plot(x,y)
axis('equal')
```

og får dette resultatet:



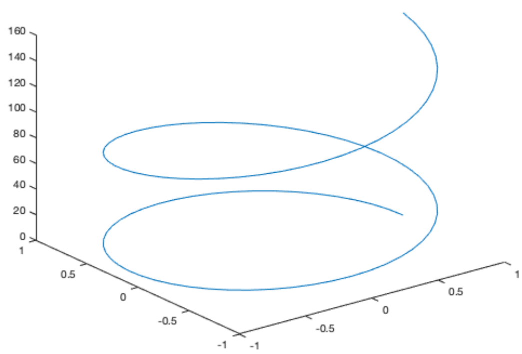
For en romlig kurve, f.eks.

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t^2) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

skriver vi:

```
t=linspace(0,4*pi,100);
x=cos(t);    y=sin(t);    z=t.^2;
plot3(x,y,z)
```

og får som resultat en illustrasjon av kurven.



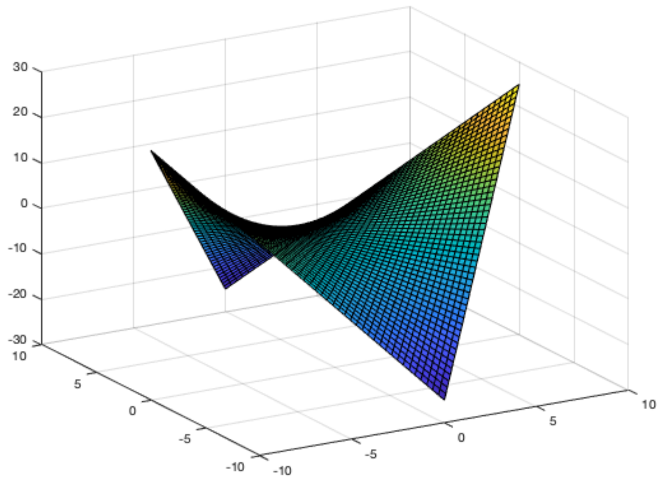
En parametrisert flate er gitt ved

$$\mathbf{r}(u,v) = (u+v, u-v, uv), \quad (u,v) \in [-5,5] \times [-5,5]$$

Vi bruker MATLAB-kommandoen

```
u=-5:0.2:5;    v=-5:0.2:5;
[U,V]=meshgrid(u,v);
x=U+V;    y=U-V;    z=U.*V;
surf(x,y,z)
```

og får et bilde av grafen:

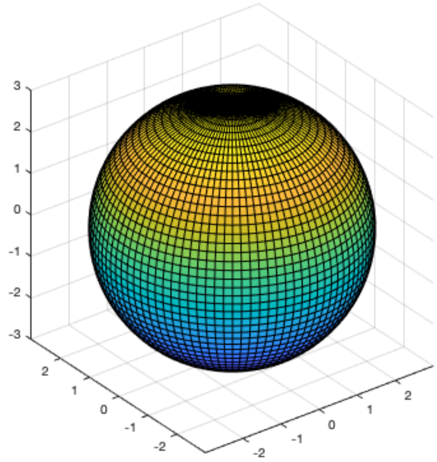


Et par andre alternativer, først en kuleflate med radius 3, gitt ved

$$\mathbf{r}(u,v) = (3\sin u \cos v, 3\sin u \sin v, 3\cos u), \quad 0 \le u \le \pi,\ 0 \le v \le 2\pi$$

som kodes

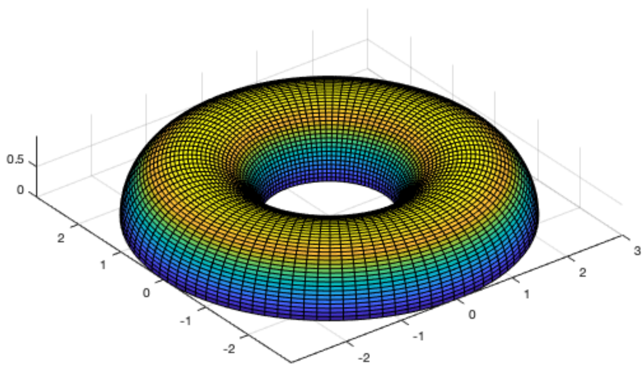
```
u=linspace(0,pi,50);    v=linspace(0,2*pi,100);
[U,V]=meshgrid(u,v);
x=3*sin(U).*cos(V);    y=3*sin(U).*sin(V);    z=3*cos(U);
surf(x,y,z)
axis('equal')
```



Eller en torus

$$\mathbf{r}(u,v) = (2+\cos u)\cos v, (2+\cos u)\sin v, \sin u), \quad 0 \le u \le \pi,\ 0 \le v \le 2\pi$$

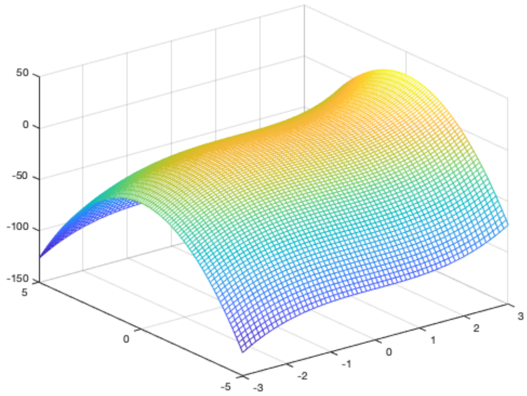
```
u=linspace(0,pi,50);    v=linspace(0,2*pi,100);
[U,V]=meshgrid(u,v);
x=(2+cos(U)).*cos(V);    y=(2+cos(U)).*sin(V);    z=sin(U);
surf(x,y,z)
axis('equal')
```



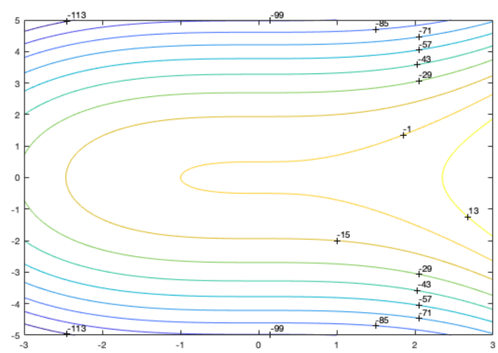
Grafen til en funksjon i flere variable

Vi skal illustrere grafen til funksjonen $f(x, y) = x^3 - 4y^2$ over rektangelet $\mathcal{R} = [-3, 3] \times [-5, 5]$.

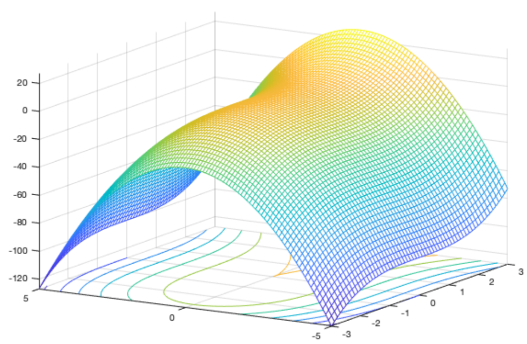
```
r=-3:0.1:3;    s=-5:0.1:5;
[x,y]=meshgrid(r,s);
z=x.^3-4*y.^2;
mesh(x,y,z)
```



Dersom vi bytter ut $mesh(x, y, z)$ med $clabel(contour(x, y, z, 10))$ får vi 10 nivåkurver ($contour(x, y, z, 10)$) med funksjonsverdien skrevet på ($clabel$).



Alternativt kan vi bruke kommandoen *meshc* som gir dette resultatet



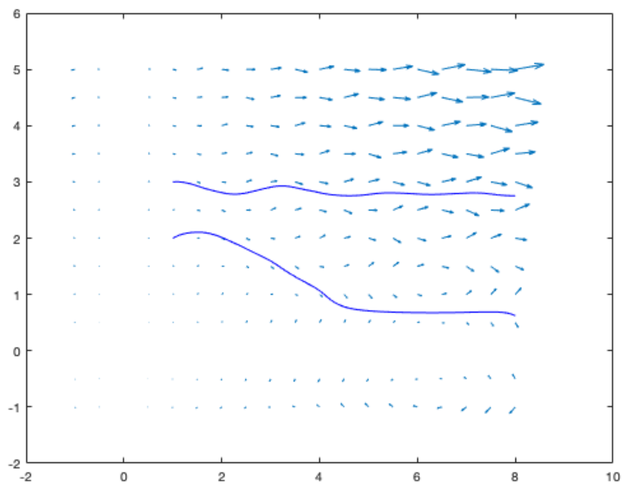
Illustrasjon av vektorfelt

Vi skal illustrere vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y) = xy\mathbf{i} + s\sin(xy)\mathbf{j}, \qquad -5 \le x \le 5, \quad -3 \le y \le 3$$

```
x=-1:0.5:8;     y=-1:0.5:5;
[x, y]=meshgrid(x,y);
u=x.*y;     v=x.*sin(x.*y);
quiver(x,y,u,v)
streamline(x,y,u,v,1,2)
streamline(x,y,u,v,1,3)
```

Her har vi også lagt inn et par strømningslinjer.



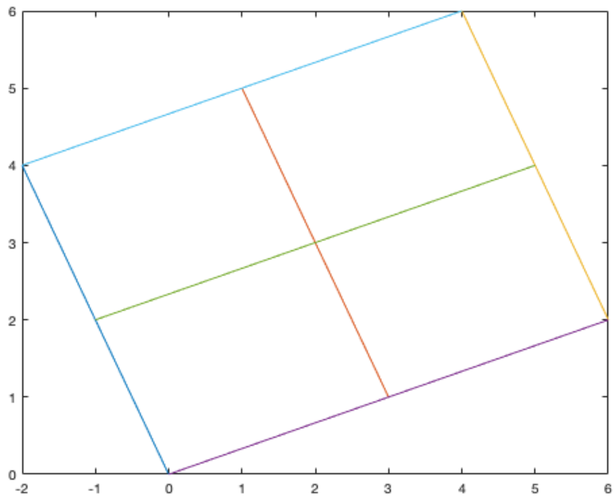
Koordinatskifter

Koordinatskifter er egentlig bare invertible avbildninger fra $\mathbb{R}^2$ inn i seg selv. Et eksempel er

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{G}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3x - y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

```
r=-2:0.25:2;   s=-2:0.25:2;
[x, y]=meshgrid(r,s);
u=3.*x-y;   v=x+2.*y;
plot(u,v,u',v')
```

Illustrasjonen viser bildet av et 2×2-rutenett.



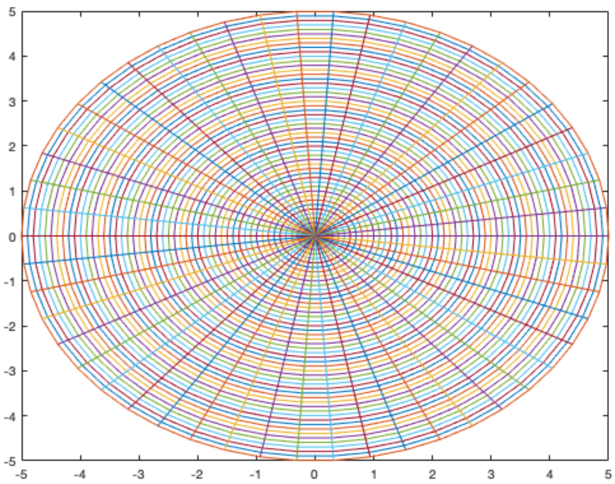
Et annet koordinatskifte er fra rettvinklede koordinater til polarkoordinater:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos y \\ x \sin y \end{pmatrix}$$

hvor x er avstanden fra origo og y er vinkelen.

```
r=0:0.1:5;   s=0:0.04.*pi:2.*pi;
[x, y]=meshgrid(r,s);
u=x.*cos (y);   v=x.*sin (y);
plot(u,v,u',v')
```

Bildet av et rutenett i (x, y)-planet ser ut som


5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

Lineær algebra

Gitt en matrise

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

MATLAB gir oss mange muligheter.

```
A=[2 -1 4 5 6;6 -1 3 2 1; -2 3 1 0 5];
B=rref(A)
r=rank(A)
```

rref gir oss den reduserte trappeformen B og *rank* rangen $r = 3$ til A :

$$B = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & -0.4286 & -0.7500 \\ 0 & 1.0000 & 0 & -0.7143 & 0.5000 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 1.2857 & 2.0000 \end{pmatrix}$$

Vi kan også finne en ortonormal basis for søylerommet til A:

```
A=[2 -1 4 5 6;6 -1 3 2 1; -2 3 1 0 5];
orth(A)
```

som gir svaret

$$\begin{pmatrix} -0.8279 & 0.1483 & -0.5410 \\ -0.5032 & -0.6223 & 0.5996 \\ -0.2478 & 0.7686 & 0.5898 \end{pmatrix}$$

Det betyr at de 3 søylene

$$\begin{pmatrix} -0.8279 \\ -0.5032 \\ -0.2478 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.1483 \\ -0.6223 \\ 0.7686 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -0.5410 \\ 0.5996 \\ 0.5898 \end{pmatrix}$$

danner en ortonormal basis for søylerommet til A.

For en kvadratisk matrise Q har vi enda flere muligheter.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Vi kan regne ut determinanten

```
Q=[1 1 2;-1 1 1; 2 3 3];
d=det(Q)
```

som i dette tilfellet gir svaret $d = -5 \neq 0$. Siden Q er invertibel kan vi finne den inverse ved

```
Q=[1 1 2;-1 1 1; 2 3 3];
QI=inv(Q)
```

Resultatet blir

$$QI = Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0.0000 & -0.6000 & 0.2000 \\ -1.0000 & 0.2000 & 0.6000 \\ 1.0000 & 0.2000 & -0.4000 \end{pmatrix}$$

MATLAB kan også løse matriselikninger $Q\mathbf{x} = \mathbf{b}$, f.eks.

$$Q\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

```
Q=[1 1 2;-1 1 1; 2 3 3];
b=[1;5;5];
x=A\b
```

MATLAB returnerer da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2.0000 \\ 3.0000 \\ 0.0000 \end{pmatrix}$$

Vi kan finne egenverdier og egenvektorer

```
Q=[1 1 2;-1 1 1; 2 3 3];
[u,v]=eig(Q)
```

som gir svaret

$$u = \begin{pmatrix} 0.4179 & 0.6249 & 0.5106 \\ 0.5978 & -0.6557 & 0.0972 \\ -0.6841 & 0.4237 & 0.8543 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -0.8434 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3068 & 0 \\ 0 & 0 & 4.5366 \end{pmatrix}$$

Dette skal vi tolke slik at søylene i u er egenvektorer og de tilsvarende diagonalelementene i v er egenverdiene.

En oppgave kan være å skrive vektoren

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$$

som en lineærkombinasjon av vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dette kan vi gjøre på følgende måte:

```
M=[1 2 5 2 4;0 1 -7 -1 -5;-1 3 6 0 10;2 -4 3 3 -6];
rref(M)
```

hvor M er matrisen med søyler $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ og $\mathbf{w}$. MATLAB svarer

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

som betyr at $\mathbf{w} = (-1) \cdot \mathbf{v}_1 + 1 \cdot \mathbf{v}_2 + 1 \cdot \mathbf{v}_3 + (-1) \cdot \mathbf{v}_4$.

Integrasjon

Det er enkelt å integrere funksjoner i MATLAB. Vi kan regne ut integralet

$$\int_0^1 \int_{-1}^2 x^2 y \, dx \, dy$$

ved kommandoen

```
dblquad(@(x,y)x.^2.*y,0,1,-1,2)
```

som gir svaret $ans = 0.5000$. Vi skal regne ut integralet

$$\iint_R xy \, dx \, dy$$

over området R i planet avgrenset av x-aksen, linja $y = x$ og sirkelen $x^2 + y^2 = 1$. I polarkoordinater svarer dette området til $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq r \leq 1$.

```
fun = @(x,y) x.*y;
polarfun = @(theta,r) fun(r.*cos(theta),r.*sin(theta)).*r;
q = integral2(polarfun,0,pi/4,0,1)
```

som gir svaret $q = 0.3424$. Vi skal regne ut trippelintegralet

$$\iiint_R (x^2 + yz) \, dx \, dy \, dz$$

over området $R = [0,1] \times [1,2] \times [0,2]$. Dette integralet finner MATLAB ved kommandoen

```
triplequad(@(x,y,z)x.^2+y.*z,0,3,1,2,0,2)
```

og gir svaret $ans = 27$.

Når vi skal regne ut dobbelt- eller trippelintegraler over mer generelle områder bruker vi funksjonen

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } f(x,y) \leq g(x,y) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Funksjonen kodes i MATLAB ved

```
(f(x,y) <= g(x,y))
```

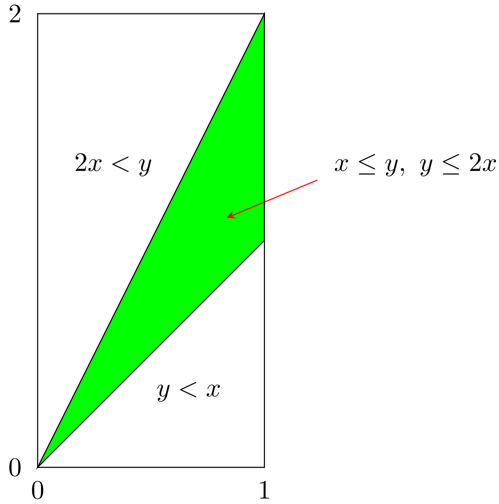
Vi skal regne ut

$$\iint_R (x + y^2) \, dx \, dy$$

over området

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1, \, x \leq y \leq 2x\}$$

Poenget er at vi integrerer over hele rektangelet, men ganger integranden med en funksjon som er 0 utenfor R.




```
I=dblquad(@(x,y)(x+y.^2).*(x<=y).*(y<=2.*x),0,1,0,2)
```

gir $I = 0.9167$.

Dynamiske system

Vi har et dynamisk system gitt ved

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= 0.5y_n + 2z_n + 0.1u_n \\
y_{n+1} &= 0.5x_n \\
z_{n+1} &= 0.8y_n \\
u_{n+1} &= 0.2z_n
\end{aligned}
$$

som vi kan skrive

$$
\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 2 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ u_n \end{pmatrix}
$$

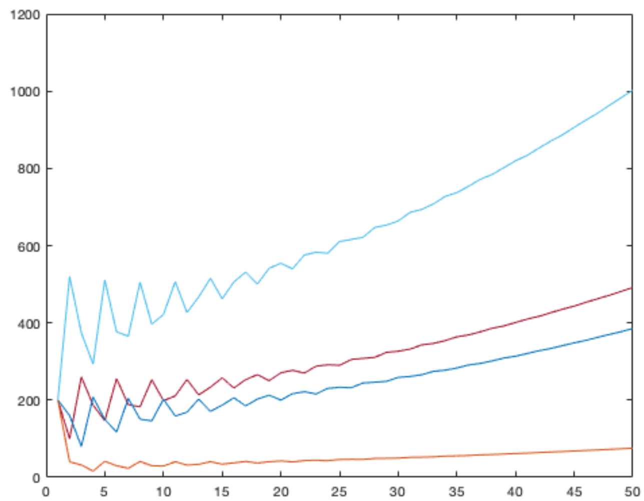
Vi definerer en funksjon som vi kaller *dyrestamme.m*:

```
function [x] = dyrestamme(a,b,c,d,N)
M=[0 0.5 2 0.1; 0.5 0 0 0; 0 0.8 0 0; 0 0 0.2 0];
x(:,1)=[a;b;c;d]
for n=1:N
.       x(:,n+1)=M*x(:,n)
end
```

Ved å skrive kommandoen

```
[x] = dyrestamme(200,200,200,200,49);
plot(x(1,:))
hold on
plot(x(2,:))   plot(x(3,:))    plot(x(4,:))
```

får vi ut følgende illustrasjon av dette dynamiske systemet.



Et annet dynamisk system er gitt ved

$$x_{n+1} = 1.01 \cdot x_n - 3 \cdot 10^{-5} x_n y_n$$
$$y_{n+1} = 0.98 \cdot y_n + \cdot 10^{-5} x_n y_n$$

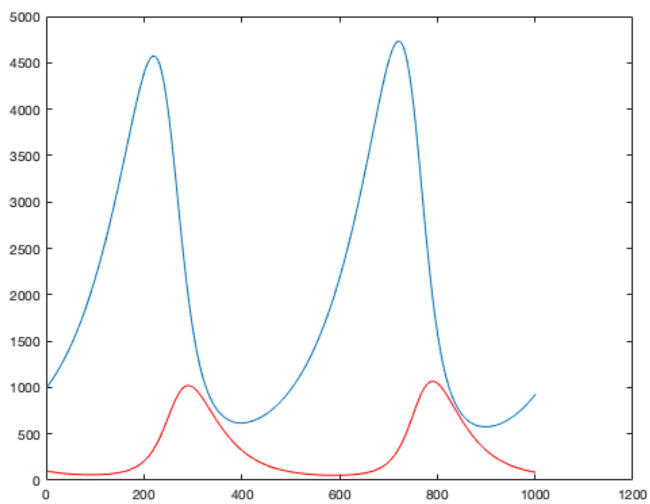
Dette kan vi kode i MATLAB ved funksjonen *byttedyr*:

```
function [x,y]= byttedyr(m,k,N)
x= zeros(1,N);    y = zeros(1,N);
x(1)=m;    y(1)=k;
for n=1:N
.        x(n+1)=1.01*x(n)-3*10^(-5)*x(n)*y(n);
.        y(n+1)=0.98*y(n)+10^(-5)*x(n)*y(n);
end
```

Hvis vi starter med $x(1) = 1000$ og $y(1) = 100$ og setter $N = 1000$, så får vi

```
[x,y]=byttedyr(1000,100,1000);
plot(x)
hold on
plot(y,"r")
```

med illustrasjon:



Vi skal bruke Newtons metode til å løse likningssystemet

$$x^2 y + 1 = 0$$
$$e^x + y = 0$$

dvs. vi skal finne et nullpunkt for funksjonen

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 y + 1 \\ e^x + y \end{pmatrix}$$

Jacobi-matrisen er gitt ved

$$\mathbf{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ e^x & 1 \end{pmatrix}$$

Iterasjonen i Newtons metode er gitt ved

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ e^x & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x^2y+1 \\ e^x+y \end{pmatrix}$$

som vi koder i MATLAB

```
function [x] = newton(a,b,N)
x=zeros(2,N);
x(:,1)=[a,b];
for n=1:N
.      J=[2*x(1,n)*x(2,n) x(1,n)^2;exp(x(1,n)) 1];
.      v=[x(1,n)^2*x(2,n)+1;exp(x(1,n))+x(2,n)];
.      x(:,n+1)=x(:,n)-J\v;
end
```

Hvis vi nå gir kommandoen [x]=newton(1,-2,5) får vi ut de 5 første iterasjonene:

$$\begin{pmatrix} 1.0000 \\ -2.0000 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.7442 \\ -2.0230 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.7045 \\ -2.0213 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.7035 \\ -2.0207 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.7035 \\ -2.0207 \end{pmatrix}$$

som er en løsning av likningssystemet.