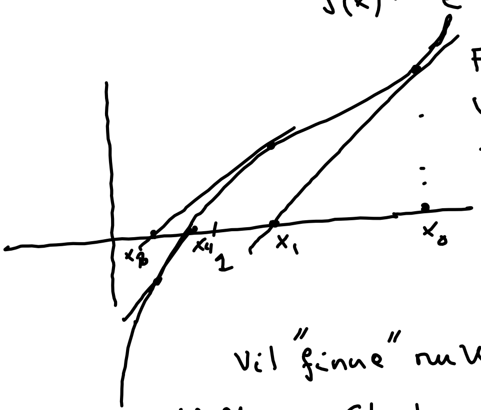
5.6. NEWTONS METODE

Iterativ metode for å finne nullpunkter til funksjoner $F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

EKS: $m = 1$

$$f(x) = e^x - 1/x^2 = 0.$$



For x nær null har vi at $f(x) < 0$.
For $x \geq 1$ har vi at $f(x) > 0$.
Da må vi ha $f(x) = 0$ for $x \in (0,1)$.

Vil "finne" nullpunktet.

N.M.: Starter med å "gjette" et nullpunkt, som vi kaller x_0 ..... se tegning.

Lineariseringen til f i et punkt x_0:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = e^{x_0} - 1/x_0^2 + \left(e^{x_0} + 2/x_0^3\right)(x - x_0)$$

Denne har nullpunkt i

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \; \cdots\cdots$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$\vdots$$

Metoden er den samme i flere variable.

For en deriverbar avbilding $F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ "gjetter" vi på et punkt x_0.

Linearisering i x_0:

$$F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

Den har en null for

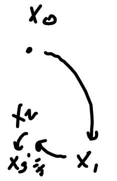
$$x_1 = x_0 - F'(x_0)^{-1} \cdot F(x_0)$$

Fortsett.

$$x_2 = x_1 - F'(x_1)^{-1} F(x_1)$$

$$x_3 = x_2 - F'(x_2)^{-1} F(x_2)$$

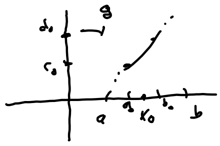
$$\vdots$$



5.7. OMVENDTE OG IMPLISITTE FUNKSJONER

Husk at dersom $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ er en funksjon med kontinuerlige partiellderiverte nær $x_0 \in (a,b)$, og dersom $f'(x_0) \neq 0$, så fins et intervall $x_0 \in (a_0, b_0)$, et intervall $(c_0, d_0) = f((a_0, b_0))$ og en funksjon $g : (c_0, d_0) \to (a_0, b_0)$ s.a. $g(f(x)) = x$ og $f(g(x)) = x$.

I tillegg $g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.



Terminologi. For en avbilding $F : A \to \mathbb{R}^m$ så er det vanlig å kalle A for <u>definisjonsmengden</u> til F, og betegne denne med D_F.

Vi definerer <u>verdimengden</u>

$$V_F = \{ F(x) : x \in D_F \}$$

<u>DEF 5.7.1</u> Funksjonen $F : D_F \to V_F$ er <u>injektiv</u> dersom det for hver $y \in V_F$ kun fins en $x \in D_F$ med $F(x) = y$.

I så er den omvendte funksjonen $G : V_F \to D_F$ definert ved $G(y) = x$.

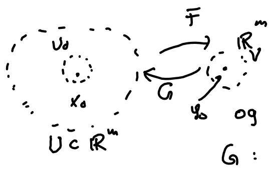
<u>Teorem 5.7.2</u> (Omvendt funksjonsteorem)

Anta at $U \subset \mathbb{R}^m$ er en åpen mengde og at $F : U \to \mathbb{R}^m$ har kontinuerlige partiellderiverte. La $x_0 \in U$ og anta at $F'(x_0)$ er inverterbar. Da fins en omegn $U_0 \subset U$ om x_0 slik at

F restriktert til U_0 er injektiv.

Verdimengden V til denne restriksjonen er en omegn om $y_0 = F(x_0)$, og den omvendte funksjonen

$G : V \to U_0$ er deriverbar i y_0 og $G'(y_0) = F'(x_0)^{-1}$.



<u>Merk</u>: G er deriverbar i hele V med kontinuerlige partiellderiverte.

<u>EKS</u>: Vis at funksjonen

$$F(x,y) = (e^x + y,\ y\cos(x))$$

er inverterbar når den restrikteres til en liten omegn om origo.

F har kontinuerlige partiellderiverte, med

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & 1 \\ -y\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

$$F'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

og denne er inverterbar siden $|F'(0,0)| = 1 \neq 0$.

IMPLISITTE FUNKSJONSTEOREM

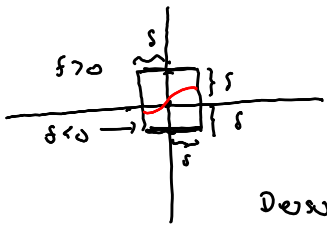
La $U \subset \mathbb{R}^n$ være en åpen mengde og la $f: U \to \mathbb{R}$ være en funksjon med kontinuerlige partiellderiverte.

Hva kan vi si om mengden

$$Z = \{x \in U : f(x) = 0\} \text{ ?}$$

Generelt: INGENTING (bortsett fra at Z er lukket).

Men anta at f har kontinuerlige partiell-derivert nær origo i $\mathbb{R}^2$ og anta at $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) > 0$.



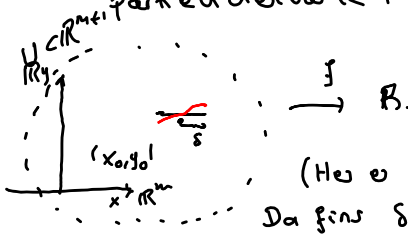
Da fins $\delta > 0$ s.a. $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) > 0$ for alle $|y| < \delta$.

Dersom $\delta > 0$ er liten nok så er $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) > 0$ for alle $|x|, |y| < \delta$.

Det "følger nå" at det fins en kontinuerlig funksjon $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ s.a.

$$Z = \{(x,y) : f(x,y) = 0\} = \{(x, g(x)) : x \in (-\delta, \delta)\}$$

Teorem (Implisitte funksjonsteorem).
La $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ være en åpen mengde, og la $f: U \to \mathbb{R}$ være en funksjon med kontinuerlige partiellderivarte.



La $(x_0, y_0) \in U$, $f(x_0,y_0) = 0$ og anta at $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. (Her er (x,y) koordinater på $\mathbb{R}^{m+1}$).
Da fins $\delta > 0$ og en funksjon $g : B_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ med kontinuerlige partiellderiverte s.a.

$$Z = \{(x,y) : f(x,y) = 0,\ |x|, |y| < \delta\} = \{(x, g(x)) : |x| < \delta\}.$$

Videre har vi $g(x_0) = y_0$ og

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}.$$

5.8 EKSTREMALVERDISETNINGEN

DEF: La $A \subset \mathbb{R}^m$ være en mengde og la $f: A \to \mathbb{R}$ være en funksjon.
Vi sier at f er begrenset dersom det fins $R > 0$ s.a.

$$-R \leq f(x) \leq R$$

for alle $x \in A$.
Vi sier at $a \in A$ er et makspunkt dersom $f(x) \leq f(a)$ for alle $x \in A$.
Vi sier vi at $a \in A$ er et minpunkt dersom $f(x) \geq f(a)$ for alle $x \in A$.

SETNING: Anta at $A \subset \mathbb{R}^m$ er lukket og begrenset, og at $f: A \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig.
Da har f maks- og minpunkter.
Så f er begrenset.

Bevis: Vi viser at f har et makspunkt.
Sett

$$M = \sup\{ f(x) : x \in A \}.$$

Det fins en følge $\{x_n\} \subset A$ s.a. $f(x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} M$.
B-W gir oss en konvergent delfølge $\{y_k\}$, $y_k \to y \in A$. (A lukket)
Vi har fremdeles $f(y_k) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} M$.
Siden f er kontinuerlig har vi $f(y) = M$.
Da er y et makspunkt.

$\blacksquare$

5.9 MAKSIMUMS- OG MINIMUMSPUNKTER.

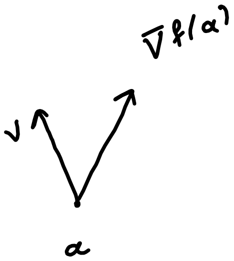
SETNING 5.9.2 Anta at en funksjon $f: A \to \mathbb{R}$ har et lokalt maks eller min i $a \in A$. Dersom f er deriverbar i a så har $\nabla f(a) = 0$.

Bevis: Anta at $\nabla f(a) \neq 0$.

Nær a:

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x-a) + \sigma(x)$$

der $\dfrac{\sigma(x)}{|x-a|} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.



La $v \in \mathbb{R}^m$ og se på

$$g(t) = f(a+tv)$$

$$g(t) = f(a) + t\left(\nabla f(a) \cdot v + \underbrace{\frac{\sigma(a+tv)}{t}}_{\downarrow\, t \to 0 \atop 0}\right)$$

så dersom $\nabla f(a) \cdot v \neq 0$
så vil g øke eller avta med t.