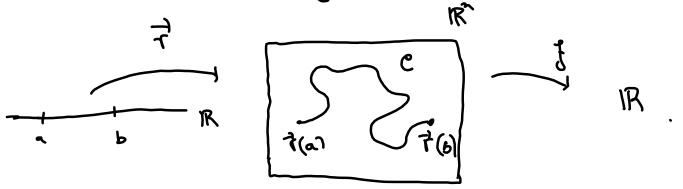
3.3. LINJEINTEGRALER FOR SKALARFELTER

DEF. La $A \subset \mathbb{R}^n$, la $\vec{r} : [a,b] \xrightarrow{C} A$ være en parametrisert kurve med kontinuerlig derivert. La $f : A \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon.
Vi definerer

$$\int_C f \cdot ds := \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot \|\vec{r}\,'(t)\| \cdot dt .$$



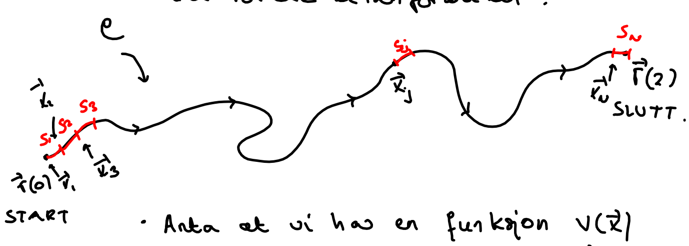
MERK: Dersom $f \equiv 1$ er dette definisjonen av lengden til C.

Hvorfor vil vi integrere funksjoner over kurver?
Hvorfor er dette en rimelig definisjon?

EKSEMPEL: · Anta at $\vec{r} : [0,2] \to \mathbb{R}^3$ beskriver banen til en bil uttrykt ved tiden t.

· Bensinforbruk: $0.05 + 0.002 \cdot v$ liter per km, (v = farten).

· Hvordan kan vi regne ut det totale bensinforbruket?



· Anta at vi har en funksjon $v(\vec{x})$ som gir oss farten i et punkt $\vec{x} \in C$.

· Da er bensinforbruket
$$f(\vec{x}) = 0.05 + 0.002 \cdot v(\vec{x})$$
per km. i punktet $\vec{x}$.

· Se på et lite stykke vei S nær et punkt $\vec{x} \in C$.

Bensinforbruk når vi tilbakelegger strekningen s er

$$\approx f(\vec{x}) \cdot \underbrace{\ell(s)}_{\text{lengden}} .$$

Se på tegningen over:

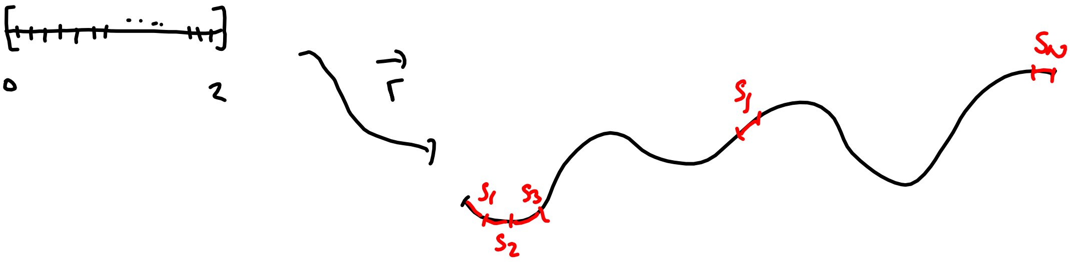
Totalt bensinforbruk $\approx$

$$f(\vec{x}_1) \cdot \ell_1 + f(\vec{x}_2) \cdot \ell_2 + f(\vec{x}_3) \cdot \ell_3 + \ldots + f(\vec{x}_N)\,\ell_N .$$

Stykk opp intervallet $[0,2]$:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = 2 .$$

Sett $s_j = \vec{r}([t_{j-1}, t_j])$, $j = 1, \ldots, N$.



$$\text{Total B.F.} \approx \sum_{j=1}^{N} f(\vec{r}(t_{j-1})) \cdot \ell(s_j) .$$

Nær t_{j-1} : $\vec{r}(t) = \vec{r}(t_{j-1}) + \vec{r}\,'(t_{j-1}) \cdot (t - t_{j-1}) + \underbrace{\sigma(t)}_{\text{veldig liten}}$.

Lengden til s_j er $\approx \|\vec{r}\,'(t_{j-1})\| \cdot (t_j - t_{j-1})$.

$$\boxed{\text{Total B.F.} \approx \sum_{j=1}^{N} f(\vec{r}(t_{j-1})) \cdot \|\vec{r}\,'(t_{j-1})\| \cdot (t_j - t_{j-1})}$$

Riemann sum for integralet

$$\int_0^2 f(\vec{r}(t)) \cdot \|\vec{r}\,'(t)\| \, dt .$$

Her har vi $v(\vec{r}(t)) = \|\vec{r}\,'(t)\|$.

Det vil si at

$$f(\vec{r}(t)) = 0.05 + 0.002 \cdot \|\vec{r}\,'(t)\| ,$$

Så bensinforbruket er

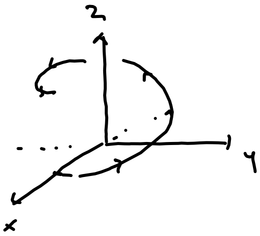
$$\int_0^2 \left(0.05 + 0.002 \cdot \|\vec{r}\,'(t)\|\right) \|\vec{r}\,'(t)\| \, dt .$$

(SE EKSEMPEL 3 I BOKA).

<u>EKS:</u> La C være den parametriserte kurven

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

og la $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.



Regn ut $\int_C f \, ds$.

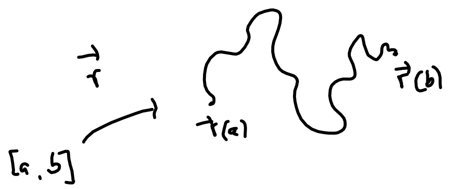
- $f(\vec{r}(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = 1 + t^2$.
- $\vec{r}\,'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$
- $\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$.

$$\int_C f \, ds = \int_0^{2\pi} f(\vec{r}(t)) \cdot \|\vec{r}\,'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} (1 + t^2)\sqrt{2} \, dt$$

$$= \text{regn ut}.$$

Vi skal se på linjeintegraler av skalarfelter i en litt mer generell kontekst.

- Vi sier at en parametrisering $\vec{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ er <u>glatt</u> dersom den er kontinuerlig og kontinuerlig deriverbar på (a,b).

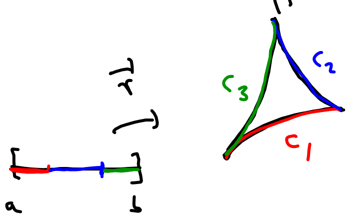


Definer:

$$\int_C f \, ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot \|\vec{r}\,'(t)\| \, dt$$

dersom integralet eksisterer.

- Vi sier at en kontinuerlig parametrisering $\vec{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ er <u>stykkevis glatt</u> dersom $[a,b]$ kan deles opp i endelig mange intervaller der $\vec{r}$ er glatt.



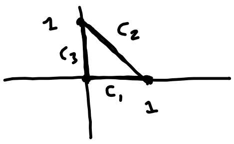
I så fall setter vi

$$\boxed{\int_C f \, ds = \sum_{j=1}^{m} \int_{C_j} f \, ds}$$

EKSEMPEL: La C være kurven som er sidene til en trekant med hjørner $(0,0)$, $(1,0)$ og $(0,1)$ i $\mathbb{R}^2$.

$f(x,y) = x^2 + y^3$.

Finn $\int_C f\, ds$.



C_1: $\vec{r}_1(t) = (t, 0)$, $t \in [0,1]$.

C_2: $\vec{r}_2(t) = (1-t, t)$, $t \in [0,1]$.

$f(x,y) = x^2 + y^3$

C_3: $\vec{r}_3(t) = (0, 1-t)$, $t \in [0,1]$.

Integralene:

C_1: $$\int_{C_1} f\, ds = \int_0^1 f(\vec{r}_1(t)) \cdot \|\vec{r}_1{}'(t)\|\, dt = \int_0^1 t^2 \cdot 1\, dt = \frac{1}{3}$$

C_2: $$\int_{C_2} f\, ds = \int_0^1 [(1-t)^2 + t^3] \cdot \sqrt{2}\, dt = \frac{7 \cdot \sqrt{2}}{12}.$$

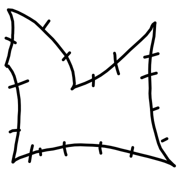
C_3: $$\int_{C_3} f\, ds = \int_0^1 (1-t)^3 \cdot dt = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{Så: } \int_C f\, ds = \frac{1}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{4}}$$

Merk:

- Integralene er uavhengig av parametriseringen (Se i boka for en presis formulering).
  - også retning.

- Integralene er uavhengig av vilkårlig oppstykking.



- Integralene tilfredsstiller "opplagte" summasjons-regler.