REDUSERT TRAPPEFORM.

EKSEMPEL: Betrakt likningssystemet

$$2x - y + 3z + u + v = 2$$
$$3x + y - z + 2u - v = 3$$
$$-x - 2y + 4z + u + 2v = 4$$

Vi danner utvidet matrise:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Vi radreduserer til vi ender opp med redusert trappeform i MATLAB.

$$\mathrm{rref}(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & -2.2 & 0 & -1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$$

Løsningene er:

$$u = 2.5$$
$$y = -0.5 + 2.2 \cdot z + v$$
$$x = -0.5 - 0.4 \cdot z.$$

Setning: Likningssystemet

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

har en entydig løsning for alle valg av $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ hvis og bare hvis den reduserte trappeformen til matrisen (a_{ij}) er

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

kalt identitetsmatrisen.

Bevis: Vi har sett entydig løsning hvis og bare hvis (a_{ij}) kan radreduseres til

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ & 1 & \ddots & & \\ & & 1 & ? & \\ & & & \ddots & b_{n-1,n} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

4.4. MATRISELIKNINGER

La A være en $(m \times n)$-matrise, og la $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Spørsmål: fins en vektor $\vec{x}$ slik at

$$(*) \qquad A\vec{x} = \vec{b} \quad ?$$

(*) er jo en likning assossiert til likningssystemet

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m . \end{aligned}$$

SETNING 4.4.1. La B være den utvidet matrisen til ligningen (*), det vil si $B = (A, \vec{b})$. Anta at B kan radreduseres til matrisen C på trappeform.

(i) Dersom den siste søylen i C er en pivotsøyle har (*) ingen løsninger.

Hvis ikke,

(ii) Hvis alle andre søyler er pivot-søyler så har (*) en entydig løsning.

(iii) Dersom minst en annen søyle ikke er pivot, har vi uendelig mange løsninger.

EKSEMPEL: Finn alle løsninger til $A\vec{x} = \vec{b}$ der

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

I MATLAB

$$\text{rref}(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.6667 & 0.3333 & 0 & 1.2963 \\ 0 & 1 & -1.6667 & -2.3333 & 0 & 1.1481 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.1111 \end{bmatrix}$$

Vi har løsninger: $x_5 = -0.1111$

$$x_2 = 1.1481 + 1.6667x_3 + 2.3333x_4$$

$$x_1 = 1.2963 - 0.6667x_3 - 0.3333x_4.$$

Vi kan skrive om:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1.2963 - 0.6667x_3 - 0.3333x_4 \\ 1.1481 + 1.6663x_3 + 2.3333x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ -0.1111 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.2963 \\ 1.1481 \\ 0 \\ 0 \\ -0.1111 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} -0.6667 \\ 1.6667 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} -0.3333 \\ 2.333 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A\vec{x} = \vec{b}$

SPØRSMÅL: Gitt en matrise A, hva garanterer at likningen $A\vec{x} = b$

(i) har en løsning for alle $\vec{b}$?

(ii) har en entydig løsning for alle $\vec{b}$?

Svar: sett $B = \text{rref}(A)$

(i) Alle rader i B har et pivotelement.

$$\begin{bmatrix} & & \\ 0 & 0 \,.. & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) $B = I_n$.

4.4.1. HOMOGENE LIKNINGER.

I det forrige eksempelet sett

$$\vec{x}_p = \begin{bmatrix} 1.2963 \\ 1.1481 \\ 0 \\ 0 \\ -0.1111 \end{bmatrix}$$

det vil si sett $x_3 = x_4 = 0$. Da er $A\vec{x}_p = \vec{b}$.

Sett

$$\vec{x}_{h_1} = \begin{bmatrix} -0.6667 \\ 1.6667 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Da har vi at

$$A(\vec{x}_p + \vec{x}_{h_1}) = \vec{b}$$
$$\shortparallel$$
$$A\vec{x}_p + A\vec{x}_{h_1}$$
$$\shortparallel$$
$$\vec{b} + \underbrace{A\vec{x}_{h_1}}_{=0}.$$

SETNING 4.4.4. Anta at $\vec{x}_p$ er en løsning av matriselikningen $A\vec{x} = \vec{b}$. Da er de andre løsningene på formen

$$\vec{x}_p + \vec{x}_h$$

der $\vec{x}_h$ er løsning til den homogene likningen $A\vec{x} = 0$.

Bevis: Anta at $\vec{x}_p$ er en løsning. Anta at $\vec{x}$ er en annen løsning. Skriv

$$\vec{x} = \vec{x}_p + \underbrace{(\vec{x} - x_p)}_{x_h}.$$

Sjekk motsatt impl.

■