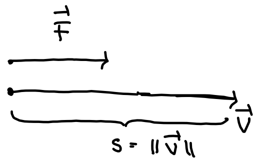
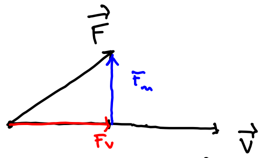
3.4 LINJEINTEGRALER FOR VEKTORFELTER

KRAFT OG ARBEID



$$W = \|\vec{F}\| \cdot s = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{v}\| = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

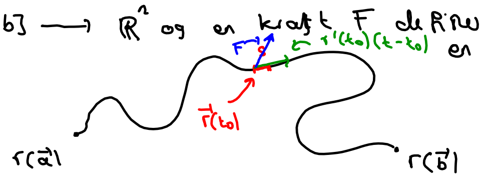


For å avgjøre arbeidet W må vi bruke komponenten til $\vec{F}$ langs $\vec{v}$.

Dekomponer: $\vec{F} = \vec{F}_v + \vec{F}_n$ der $\underline{\vec{F}_n \cdot v = 0}$.

$$W = \vec{F}_v \cdot \vec{v} = \vec{F}_v \cdot \vec{v} + \vec{F}_n \cdot \vec{v} = (\vec{F}_v + \vec{F}_n) \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Se nå videre på en glatt parametrisert kurve $\vec{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ og en kraft F definert i nærheten av kurven.



Hva er arbeidet utført omtrent langs s?

Nær $\vec{r}(t_0)$: $\vec{r}(t) = r(t_0) + r'(t_0)\cdot(t-t_0) + \sigma(t)$

$$\boxed{W_s \approx F(r(t_0)) \cdot r'(t_0) \cdot (t-t_0)}$$

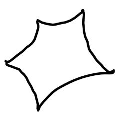
Gjenta våre tidligere argumenter, og vi får at det totale arbeidet burde være

$$\int_a^b F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt.$$

DEF: Anta at $F : A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$, er kontinuerlig, og at $\vec{r} : [a,b] \to A$ er en stykkevis glatt parametrisering av en kurve $\mathcal{C}$. Vi definerer

$$\int_C \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt,$$

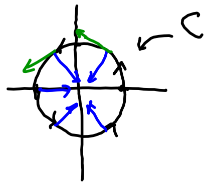
gitt at integralet eksisterer.



- Slike integraler er viktige i fysikk.
- ______ " ______ i teoretisk matematikk, for eksempel kompleks funksjonsteori.

EKS1: La $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved $\vec{F}(x,y) = (-x,-y)$. La $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

Finn $\int_C \vec{F} \cdot dr$.



- $F(\vec{r}(t)) = (-\cos t, -\sin t)$
- $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$.

$$\int_C \vec{F} \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (-\cos t, -\sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 0 \, dt = 0.$$

EKSEMPEL 2 La $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være definert ved $\vec{F}(x,y) = (xy, 1)$, og la $\vec{r}$ være som før.

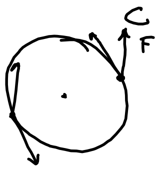
- $\vec{F}(\vec{r}(t)) = (\cos t \cdot \sin t, 1)$.
- $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$\int_C \vec{F} \cdot dr = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\cos t \sin^2 t + \cos t \, dt$$

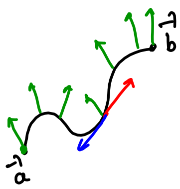
$$= \left[-\frac{1}{3} \sin^3 t + \sin t \right]_0^{2\pi} = 0.$$



- Integralene tilfredsstiller tilsvarende summasjonsregler som for skalarfelter (3.4.2).

- Integralene er uavhengig av oppstykking av kurver. (3.4.3)

- Integralene er uavhengig av parametrisering så lenge orienteringen er bevart.



3.5 GRADIENTER OG KONSERVATIVE FELTER

HUSK AT DERSOM f ER DERIVERBAR PÅ $[a,b]$ SÅ HAR VI AT

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a).$$

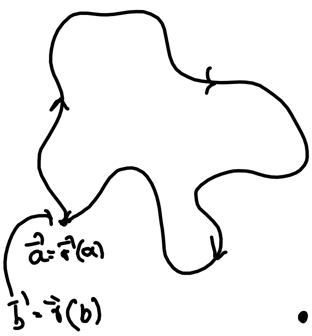
EKS:
$$\int_0^{\pi/2} \cos t \,dt = \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1.$$

Husk nå at en generalisering av den deriverte til flere variable er gradienten.
Dersom $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ er et skalarfelt så er gradienten

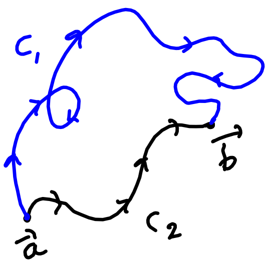
$$\underbrace{\nabla\phi(\vec{x}) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n}(\vec{x})\right)}_{\text{Eksempel på et vektorfelt.}}$$

SETNING 3.5.1 Anta at $\phi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ er en kontinuerlig deriverbar funksjon av n variable, og la $\vec{r} : [a,b] \longrightarrow A$ parametrisere en stykkevis glatt kurve C. Da har vi at

$$\int_C \nabla\phi \cdot dr = \phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a)).$$



- Hvis $\vec{a} = \vec{b}$: $\int_C \nabla\phi \, dr = 0.$



- $\int_{C_1} \nabla\phi \cdot dr_1 = \int_{C_2} \nabla\phi \cdot dr_2 .$

EKS $\phi(x,y) = e^x \sin(y^2)$

$\nabla\phi(x,y) = (e^x \sin y^2,\ 2y e^x \cos(y^2))$

La C være enhetssirkelen i $\mathbb{R}^2$,

og regn ut $\int_C \nabla\phi \cdot dr$.

$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\int_C \nabla\phi \cdot dr = \int_0^{2\pi} [(e^{\cos t}\sin(\sin^2 t), 2\sin t \cdot e^{\cos t} \cdot \cos(\sin^2 t)) \cdot (-\sin t, \cos t)]\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cdot \sin(\sin^2 t) \cdot (-\sin t) + 2\sin t\, e^{\cos t} \cdot \cos(\sin^2 t) \cdot \cos t\, dt.$$

$$= 0$$

Hvordan vite at et vektorfelt er gradienten til en funksjon?

La $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig to ganger deriverbar.

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = (F_1, F_2).$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$$

SETNING 3.5.5. Anta at

$$F(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), \dots, F_n(\vec{x}))$$

er kontinuerlig deriverbart vektorfelt.
Dersom F er gradienten til en funksjon så har vi

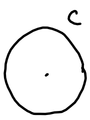
$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\vec{x}),$$

for alle $\vec{x}$.

EKS: $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$.

er definert på $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Sjekk at $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$.



$$\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = 2\pi.$$