HOMOGEN LIKNING

(*) $A\vec{x} = 0$

KOROLLAR 4.4.3. Anta at matrisen A har trappeform D. Dersom alle søylene i D er pivot, har den homogene likningen (*) en entydig løsning $\vec{0}$.
Dersom minst en søyle ikke er pivotsøyle har vi uendelig mange løsninger.
Dersom A er en $n \times n$-matrise er $\vec{0}$ eneste løsning hviss $\text{rref}(A) = I_n$.

4.4.2. SIMULTANE LØSNINGER TIL MATRISELIKNINGER.

OBSERVASJON: La A være en $n \times m$-matrise, la $\vec{x}_j$ være m-vektorer, $j = 1, \dots, k$, og la B være matrisen

$$B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, x_k)$$

Da har vi

$$AB = (A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_k).$$

La oss se på en $n \times n$-matrise A s.a. $A\vec{x} = \vec{b}$ har entydig løsning for alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.
Da er $\text{rref}(A) = I_n$.
La $\vec{b}_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}^n$. Vi vil løse $A\vec{x}_j = \vec{b}_j$ for $j = 1, \dots, k$.
Hvordan løse en likning

$$A\vec{x} = \vec{b}_j \ ?$$

Dann matrisen

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_{j,1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_{j,n} \end{bmatrix}$$

$$\text{rref}(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{j,1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{j,2} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & c_{j,n} \end{bmatrix}$$

$\underbrace{c_{j,n}}_{c_j}$

Nå har vi $A\vec{c}_j = \vec{b}_j$.

For $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ samtidig:
Sett

$$B = (A, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$$

$$\text{rref}(B) = (I_n, \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k).$$

Nå har vi $A\vec{c}_j = b_j$ for $j = 1, \dots, k$.

EKSEMPEL:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Vi vil løse $A\vec{x}_j = \vec{e}_j$ for $j = 1, 2, 3$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rref}(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.3 & -1/2 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{0.9 \quad -1/2 \quad -0.1}_{} \end{bmatrix}$$

$C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$

Da har vi

$$AC = (A\vec{c}_1, A\vec{c}_2, A\vec{c}_3)$$
$$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dette virker generelt: Dersom A er en $n \times n$-matrise med $\text{rref}(A) = I_n$ danner vi oss

$$B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n).$$

$$\text{rref}(B) = (\underbrace{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n}_{I_n}, \underbrace{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_n}_{C})$$

Da er $AC = I_n$.

Da har vi en metode for å en en høyreinvers til slike matriser.

4.5 INVERSE MATRISER

HUSK FRA MAT1100: En $n \times n$-matrise A er invertibel dersom det fins en $n \times n$-matrise C s.a.

$$CA = AC = I_n.$$

SETNING 4.5.3 Anta at A og C er $n \times n$-matriser slik at $AC = I_n$. Da er $CA = I_n$, og A og C er altså invertible.

SETNING: En $n \times n$-matrise A er invertibel hvis og bare hvis likningen $A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig løsning for alle $\vec{b}$, igjen ekvivalent med $\text{rref}(A) = I_n$.

Merk: Anta at vi vil løse $A\vec{x} = \vec{b}$ og at A er invertibel, med invers C.

$$A(\underbrace{C\vec{b}}_{\vec{x}}) = (AC)\vec{b} = I_n\vec{b} = \vec{b}.$$

MATLAB: inv (A) gir den inverse matrisen til A

4.6. LINEÆRE KOMBINASJONER OG BASISER.

Vi har sett, også i Oblig 1, at det kan være nyttig og skrive en vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ som en lineærkombinasjon av vektorer $\vec{a}_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, m$,

$$\vec{b} = x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_m \cdot \vec{a}_m ,$$

$x_j \in \mathbb{R}$.

EKSEMPEL: Kan vi skrive $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ som en lineærkombinasjon av $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$?

Ønsker vi å skrive

$$x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 = \vec{b}$$

$$\Updownarrow$$

Sett $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$.

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

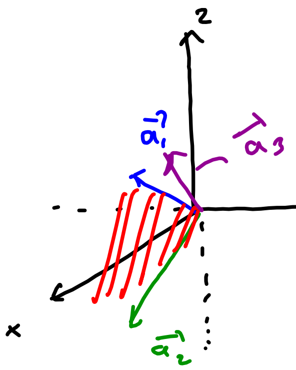
Utvidet matrise for likningen:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Så vi har en løsning $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.



$\vec{a_1}$ og $\vec{a_2}$ definerer et 2-dimensjonalt plan V i $\mathbb{R}^3$

så mange vektorer er ikke lineærkombinasjoner av $\vec{a_1}$ og a_2.

Ta en vektor $\vec{a_3} \notin V$.

Kan alle vektorer i $\mathbb{R}^3$ skrives som en lineærkombinasjon av $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ og $\vec{a_3}$?