# 5.9 MAKS- OG MINPUNKTER

- $f: A \to \mathbb{R}$
- $a \in A$ er et maks- eller minpunkt
- $f$ er deriverbar i $a$

$\Big\}$ $\nabla f(a) \neq 0$.

EKS: Se på $f(x,y) = 3xy - 3x + 9y$.
Sjekk om $f$ har ekstrempunkter.

$\nabla f(x,y) = (3y - 3, 3x + 9)$

Eneste mulige kandidat: $(-3, 1)$

Må sjekke om $(-3,1)$ er et ekstrempunkt

Triks: kan sjekke om origo er et ekstrempunkt for

$g(x,y) = f(x-3, y+1) = 3xy + 9$.

Da ser vi at vi ikke har et ekstrempunkt.

DEF: Vi sier at et punkt $x$ der $\nabla f(x) = 0$ er et stasjonært punkt.

Annenderivertesten: Starter med et spesielt enkelt polynom

$$f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$$

Ser at origo er et stasjonært punkt.

La nå $A$ være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}(0) =: (\tfrac{1}{2}) Hf(0)$$

Påstand: det fins en matrise $M$ s.a.

$$g(x) = f(Mx) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2,$$

der $\lambda_1, \lambda_2$ er egenverdien til $A$.

- Dersom $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ er origo et minimum
- Dersom $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ er origo et maksimum.
- Dersom $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ så er origo et sadelpunkt.

Teorem 5.9.6 La a være et stasjonært punkt for en funksjon $f$ av $m$ variable. Anta at de annenordens partiellderiverte til $f$ er kontinuerlige nær $a$. Da gjelder:

$$H = Hf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_m} \end{pmatrix}$$

a) Dersom alle egenverdiene til $H$ er strengt positive er $a$ et minimumspunkt.

b) Dersom alle egenverdiene til $H$ er strengt negative er $a$ et makspunkt.

c) Der $H$ har både strengt positive og strengt negative egenverdier er $a$ et sadelpunkt.

Bevis: (i eksempelet over).

$$f(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2.$$

$$A = \frac{1}{2}Hf = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$$

Observer: $f(x) = x^T A x$

$$(x_1, x_2)\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = f(x)$$

Vi har at $A$ er ortogonalt diagonaliserbar, det vil si at det fins $M$ så $M^{-1} = M^T$ og

$$M^{-1} A M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$g(x) = f(Mx) = (Mx)^T A (Mx) = (x^T M^T) A (Mx)$$
$$= x^T (M^T A M) x$$
$$= x^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x$$
$$= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2.$$

I dimensjon 2 kan vi forenkle formuleringen av teoremet. Vi har

$$H = Hf(a) = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

- Hvis $\det H > 0$ og $A > 0$ så er $a$ et minimum.
- Hvis $\det H > 0$ og $A < 0$ så er $a$ et makspunkt.
- Dersom $\det H < 0$ så er $a$ et sadelpunkt.

EKS Finn stasjonære punkter for

$$f(x,y) = yx^2 - xy^2 + y - x$$

og avgjør hvilke type de er.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy - y^2 - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - 2xy + 1.$$

Må finne ut hvor $\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0}_{*}$.

Hvis * holder må vi

$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, og $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y^2$.

Så vi må vi ha $y = \pm x$.

Ser at vi må ha $y = x$.

De stasjonære punktene blir $(1,1)$ og $(-1,-1)$.

Regn ut at

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x-2y \\ 2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1,1) \text{ er et sadelpunkt.}$$

Tilsvarende blir $(-1,-1)$ også et sadelpunt.

## UOPPSTILTE PROBEMER.

**EKS:** Vi har en ståltråd av lengde 1.

Vi ønsker og dele den i maksimalt 3 deler og kvadrater slik at det total arealet blir maksimalt/minimalt.

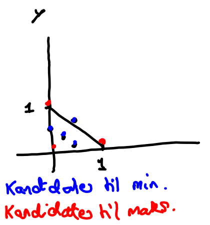
La lengdene på bitene betegnes med $x$, $y$ og $1-x-y$.

Arealet:

$$A(x,y) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 + \left(\frac{1-x-y}{4}\right)^2$$

$$= \frac{1}{16}\left[x^2+y^2+(1-x-y)^2\right].$$

Vi ser på $f(x,y) = x^2+y^2+(1-x-y)^2$.




- $x$ og $y$ kan ikke summere til noe som overstiger 1, så $(x,y)$ må ligg i trekanten avgrenset av koordinataksene og linja $y = 1-x$.

Vi starter med å lete etter lokale ekstrempunkter via annenderiverttesten.

Vi har

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 4x+2y-2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 4y+2x-2 \end{aligned}\right\}$$

Du finner at det eneste stasjonære punktet er $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

$$H = Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \det H &= 16-4 = 12. \\ 4 &> 0 \end{aligned}\right\} \to (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) \text{ er et lokalt minpunkt.}$$

Må sjekke randa til trekanten.

Vi går gjennom de tre bitene av randa.

- For linjen $y = 1-x$:

  $g(x) = f(x,1-x) = 2x^2-2x+1$.

  Analyser $g$ som i Kalkulus, og finn at $(1/2, 1/2)$ er et minimumspunkt og $(0,1)$ og $(1,0)$ er makspunkter.

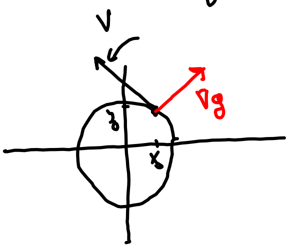
For de to resterende linjene: $(0,0)$ er et makspunkt og $(0,\frac{1}{2})$ og $(\frac{1}{2},0)$ er minpunkter.

Evaluer $f$ i alle punkter og du finner at $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$ er makspunkter, og $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ er minpunkt.

# Lagranges multiplikatormetode

Vi ønsker og maksimere/minimere en funksjon $f$ på en mengde $\{g = c\}$ for en funksjon $g$.

EKS: La oss si at vi ønsker å se på $f(x,y) = x^2 y$ på mengden $\{g = 1\}$ der $g(x,y) = x^2 + y^2$.




La oss si at $(x_0,y_0)$ er et ekstrempunkt.
Da kan ikke $f$ ha en "streng" positiv/negativ derivert i tangentretningen $v$ i $(x_0,y_0)$

Den deriverte i retning $v$ er

$$\nabla f(x_0,y_0) \cdot v .$$

Må $\nabla f(x_0,y_0) \cdot v = 0$.
Da må $\nabla f(x_0,y_0)$ stå normalt på sirkelen, dvs. være proporsjonal med

$$\nabla g(x_0,y_0) = (2x_0, 2y_0) .$$

Det vil si at dersom $(x_0,y_0)$ er et ekstrempunkt så må vi kunne løse

$$(*) \qquad \nabla f(x_0,y_0) = \lambda \cdot \nabla g(x_0,y_0)$$

for $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lagrange: let først etter punkter der likningen $(*)$ kan løses; dette gir kandidater til ekstrempunkter.