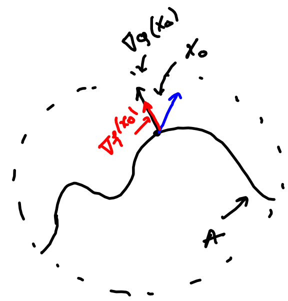
LAGRANGE



Teorem 5.10.1. Anta at $U \subset \mathbb{R}^m$ e åpen mengde, og la $f, g : U \to \mathbb{R}$ være to funksjoner med kontinuerlig partiell deriverte på U. La $b \in \mathbb{R}$ og anta at x_0 er et lokalt maks eller min for f på mengden

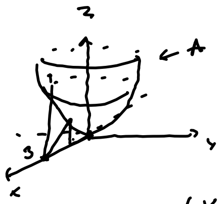
$$A = \{x \in U : g(x) = b\}$$

Da e enten $\nabla g(x_0) = 0$ eller det fins $\lambda \in \mathbb{R}$ s.a.

$$\nabla f(x_0) = \lambda \cdot \nabla g(x_0) .$$

EKS: Finn ekstremalpunkter for

$$f(x,y,z) = (x-3)^2 + y^2 + z^2$$



på mengden

$$x^2 + 4y^2 - z = 0$$

La $g(x,y,z) = x^2 + 4y^2 - z$

(Kan gjette at $y=0$ i et min).

$$\nabla f(x,y,z) = (2x-6, 2y, 2z)$$

$$\nabla g(x,y,z) = (2x, 8y, -1)$$

- ∇g e aldri null.
- Må løse $\boxed{\nabla f(x,y,z) = \lambda \cdot \nabla g(x,y,z)}$

$$2x - 6 = 2\lambda x$$
$$2y = 8\lambda y$$
$$2z = -\lambda$$

$$\boxed{\begin{aligned} x - 3 &= \lambda x \\ y &= 4\lambda y \\ 2z &= -\lambda \\ x^2 + 4y^2 - z &= 0 \end{aligned}}$$

1. $y \neq 0.$
$\lambda = \frac{1}{4}$
$x = 4$
$z = -\frac{1}{8}$

$$16 + 4y^2 + \frac{1}{8} = 0$$

UMULIG!

2. $y = 0.$
$z = x^2$
$2x^2 = -\lambda$
$2x^3 + x - 3 = 0$

Har en løsning for $x = 1$. Polynomdivisjon gir at det ikke fins flere røtter.

Så eneste kandidat for min-punkt er $(1,0,1)$.

KALKULUS

12 REKKER

12.1. Konvergens av rekker.

Hva betyr det at

$$\pi = 3.14159 \dots ?$$

Det betyr at

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10.000} + \dots$$

DEF: En rekke er en uendelig sum med tall

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

EKS: $\sum_{n=0}^{\infty} n = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Dersom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er en rekke definerer vi

delsummer $S_K = \sum_{n=0}^{K} a_n$.

I eksemplene over

$$S_K = \sum_{n=0}^{K} n = \frac{K(K+1)}{2}$$

$$S_K = \begin{cases} 1 & \text{for } K \text{ partall} \\ 0 & \text{for } K \text{ oddetall.} \end{cases}$$

DEF: Vi sier at en rekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer

dersom følgen av delsummer konvergerer.
Dersom rekka ikke konvergerer sier vi at
den divergerer.

Setning 12.1.1.

Anta at $a_0 \neq 0$ og la $r \in \mathbb{R}$.
Da har vi at
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \cdot r^n$$
(geometrisk rekke).

konverer for $|r| < 1$ og divergerer for $|r| \geq 1$.

Anta $a_0 = 1$. Anta at $r \neq 1$.

Bevis: Vi påstår først at
$$s_k = \sum_{n=0}^{k} r^n = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$$

Vi viser det ved induksjon på k.

- Sant for $k=0$!
- Anta sann for $k \geq 0$.

$$s_{k+1} = s_k + r^{k+1} \underset{\text{I.H.}}{=} \frac{1-r^{k+1}}{1-r} + r^{k+1}$$

$$\sum_{n=0}^{k+1} r^n$$

$$= \frac{1-r^{k+1}}{1-r} + \frac{r^{k+1}(1-r)}{1-r}$$

$$= \frac{1-\cancel{r^{k+1}}+\cancel{r^{k+1}}-r^{k+2}}{1-r}$$

$$= \frac{1-r^{k+2}}{1-r}.$$

Se på tilfellet $|r|<1$. Påstår at rekka konvergerer mot $\frac{1}{1-r}$.

Vi har $s_k - \frac{1}{1-r} = \frac{\cancel{1}-r^{k+1}}{1-r} - \frac{\cancel{1}}{1-r}$

$$= \frac{-r^{k+1}}{1-r} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Sjekk divergens selv for $|r| \geq 1$.

Setning 12.1.4 (Divergenstesten)
Hvis $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer har vi $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

<u>Bevis:</u> Anta at S_k og S_{k-1} konvergerer mot en grense S.

$S_k = \sum_{n=0}^{k} s_n$

Da vet vi at

$$\underbrace{S_k - S_{k-1}}_{a_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} S - S = 0$$

$a_k \downarrow 0$, $k \to \infty$.

EKS: Vis at $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ diverger.

Vil vise at $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ ikke går mot null når $n \to \infty$.

Ser på: $\log\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = n \cdot \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{\log\left(\frac{n}{n+1}\right)}{1/n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{n}{n+1}\right)}{1/n} \overset{L'H}{=} -1.$$

Da har vi $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1}$.

Så vi kan konkludere med divergenstesten.

EKS: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer.

$$\begin{aligned} &\parallel \\ &1 \\ &+ \tfrac{1}{2} \\ &+ \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} \\ &+ \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} \\ &+ \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \dots + \tfrac{1}{16} \\ &\vdots \\ &+ \tfrac{1}{2^{k-1}} + \tfrac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \tfrac{1}{2^k} \end{aligned}$$

$\leftarrow$ 2^{k-1} ledd, alle større en $\frac{1}{2^k}$. Så summen e større enn $\frac{1}{2}$.

Setning 12.1.7.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B .$$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) = A - B$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot A \quad , \quad c \in \mathbb{R}$,

Korollar 12.1.8

Anta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er konvergent og at $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ er divergent.

Da divergerer $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ og $\sum_{n=0}^{\infty} a_n - b_n$.

Bevis: Anta for motsigelse at $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ konvergerer.

Da har vi $\sum_{n=0}^{\infty} \left[(a_n + b_n) - a_n\right]$ konvergerer

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Tilsvarende for differansen. ∎

Setning 12.1.9.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=M}^{\infty} a_n$ er enten begge konvergente

eller begge divergent.

12.2 Rekker med positive ledd.

Vi ser på $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, der $a_n \geq 0$ for alle n.

$$a_0 \leq a_0 + a_1 \leq a_0 + a_1 + a_2 \leq \dots$$

$$S_k \leq S_{k+1}.$$

Setning 12.2.1.
En rekke med positive ledd konvergerer hvis og bare hvis den er begrenset.

EKS: Vis at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$ er konvergent.

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(n+1)\cdot 2^n} \leq \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

INTEGRALTESTEN.

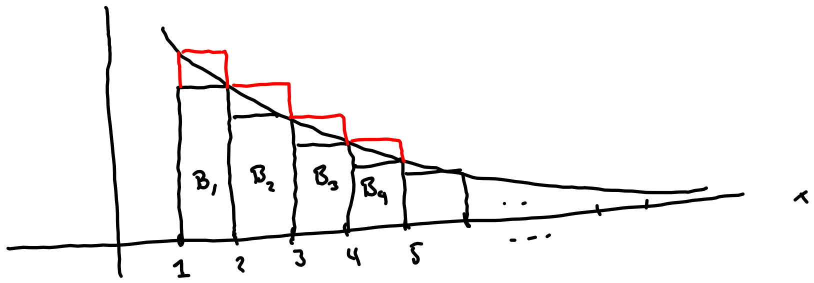
SETNING 12.2.3. La $f: [1, \infty) \to \mathbb{R}$ være en positiv og avtagende kontinuerlig funksjon. Da er $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent hvis og bare hvis $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ er konvergent.

Anvendelse: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left[\log x\right]_1^N = \lim_{N\to\infty} \log N = \infty$$

Bevis:



Anta at $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ er konvergent.

Da må $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Areal}(B_n) < \infty$

$$\overset{\parallel}{\sum_{n=2}^{\infty} f(n)}$$

OK

<u>Setning</u> <u>12.2.6</u>. La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ være positive rekker.

(i) Dersom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer og $b_n \leq c \cdot a_n$,
da konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

(ii) Dersom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergerer og $b_n \geq c \cdot a_n$,
da divergerer $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.