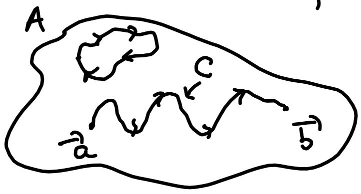
GRADIENTER OG KONSERVATIVE VEKTORFELTER

HUSK: Et vektorfelt $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^n$ er konservativt dersom $\vec{F} = \nabla\phi$, der $\phi: A \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig deriverbar funksjon.

$F=(F_1,\dots,F_m)$



$\xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$ $\quad \nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\phi}{\partial x_m}\right)$.

$$\int_C \vec{F}\cdot dr = \phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a}).$$

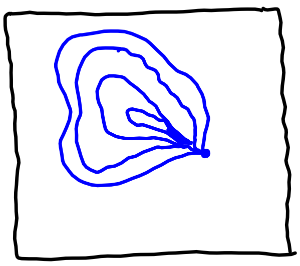
HVORDAN KAN VI VITE AT ET GITT VEKTORFELT ER KONSERVATIVT?

NØDVENDIG BETINGELSE:

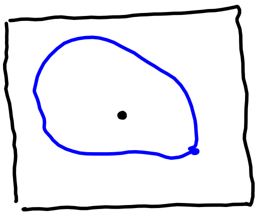
$$(*) \qquad \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\vec{x}),$$

FOR ALLE $\vec{x} \in A$ og $1 \le i,j \le n$.

"DEF": Et område $A \subset \mathbb{R}^n$ er <u>enkeltsammenhengende</u> hvis enhver lukket kurve C i A kan snurpes kontinuerlig sammen til et punkt i A.



A



$A = [(-1,1)\times(-1,1)] \setminus \{(0,0)\}$

$\boxed{\text{KRONEKSEMPEL: } \mathbb{R}^n.}$

VIKTIG RESULTAT (3.5.4). Dersom A er enkeltsammenhengende og $F: A \to \mathbb{R}^n$ tilfredsstiller $(*)$, så er F konservativt.

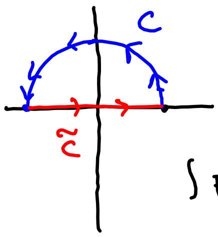
EKSEMPEL $F(x,y) = \left(2xy + ye^{xy} + 3x^2,\ x^2 + xe^{xy}\right)$.

La $\vec{r} : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ være definert ved $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

Finn: $\int_C F \cdot dr$,

der C betegner kurven parametrisert av $\vec{r}$

$\mathbb{R}^2$



$$\int F \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi} F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \left(2 \cdot \cos t \sin t + \sin t \cdot e^{\sin t \cos t} + 3\cos^2 t\right) \cdot (-\sin t) + \left(\cos^2 t + \cos t \cdot e^{\cos t \sin t}\right) \cos t \quad dt.$$

F er konservativt!

Har da: $\int_C F \cdot dr + \int_{\tilde{C}} F \cdot dr = 0$.

Definer $\tilde{r} : [0,2] \to \mathbb{R}^2$ ved

$\tilde{r}(t) = (-1+t, 0)$.

$$\int_{\tilde{C}} \vec{F} \cdot dr = \int_0^2 F(\tilde{r}(t)) \cdot \tilde{r}\,'(t)\, dt$$

$$= \int_0^2 \left(3(-1+t)^2,\ (-1+t)^2 + (-1+t)\right) \cdot (1,0)\, dt$$

$$= \int_0^2 3 \cdot (-1+t)^2\, dt = 2.$$

$$\boxed{\text{Så: } \int_C F \cdot dr = -2.}$$

q

$$F(x,y) = \left(2xy + ye^{xy} + 3x^2,\ x^2 + xe^{xy}\right)$$

Forsøk å finne $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s.a. $F = \nabla\phi$.

$$= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right).$$

- $\phi(x,y) = x^2y + e^{xy} + x^3 + g(y)$
- $\phi(x,y) = x^2y + e^{xy} + h(x)$
- $\boxed{\text{Gir: } \quad \phi(x,y) = x^2y + e^{xy} + x^3}$

$$\int_C \vec{F} \cdot dr = \phi((-1,0)) - \phi((1,0)) = -2.$$

GRAFISK FREMSTILLING AV KURVER.

La $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), 5\sin(4t))$,
med $t \in [0, 2\pi]$.

Linearisering i $\frac{\pi}{2}$.

$$T_{\pi/2}\vec{r}(t) = \vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

$$(0, 1, 0) + \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot (-1, 0, 20).$$

Grafer i $\mathbb{R}^3$: Se på grafen
$(x, y, 2 - x^2 - y^2)$.