LINEÆRE KOMBINASJONER OG BASISER

La $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$. Ofte ønsker vi for $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ og uttrykke

$$(*) \qquad \vec{b} = x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{a}_n .$$

Merk at å uttrykke $\vec{b}$ som i $(*)$ er det samme som å løse

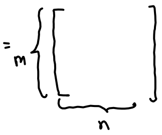
$$(**) \qquad A\vec{x} = \vec{b},$$

der $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$.

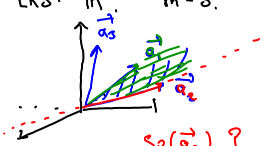
Vi vet nå dette er mulig, det er hvis og bare hvis $\mathrm{rref}(A, \vec{b})$ ikke har siste søyle som pivotsøyle (4.2.4)

Vi vet også nå $(**)$ har en løsning for alle $\vec{b}$, det er hvis og bare hvis alle radene i $\mathrm{rref}(A)$ inneholder pivotelementer.

Merk at i så fall har vi $n \geq m$.

A = 

EKS: $\mathbb{R}^3$. $m = 3$.



$Sp(\vec{a}_2)$?

$Sp(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$?

Vi definerer spennet

$$Sp(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$$

som mengden av vektorer som kan skrives som lineære kombinasjoner av $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

LINEÆR UAVHENGIGHET

DEF 4.6.4 Vi sier at vektorene $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ er lineært uavhengige dersom enhver $\vec{b} \in Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\vec{a}_j$'ene på en entydig måte. Dvs.

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = y_1\vec{a}_1 + \dots + y_n\vec{a}_n$$
$$\Downarrow$$
$$x_1 = y_1, \; x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n .$$

EKS: $\vec{a}_1 = (1,0)$, $\vec{a}_2 = (0,1)$, $\vec{a}_3 = (1,1)$ $\leftarrow$ Er disse lineært uavhengige?

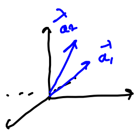
Nei!

- $(1,1) = 1 \cdot \vec{a}_3$
- $(1,1) = 1\vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{a}_2$

OBSERVER AT $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3 = 0$.

SETNING 4.6.5 Vektorene $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ i $\mathbb{R}^m$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{0} \iff x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 .$$



SETNING 4.6.6 Vektorene $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis alle søylene i $\mathrm{rref}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ er pivotsøyler.

EKS: Avgjør om vektorene

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-2\\0\\2\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3\\2\\-3\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4\\-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

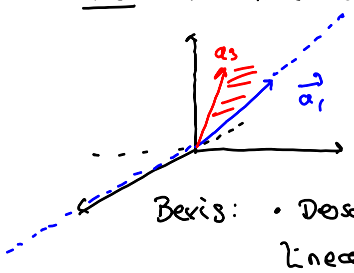
er lineært uavhengige. rref(A) i MATLAB.

SETNING 4.6.8 La $\vec{a}_j \in \mathbb{R}^m$, $j=1,\dots,n$, være vektorer som ikke alle er null. Da fins en delmengde $\vec{a}_{i_1},\dots,\vec{a}_{i_k}$ av vektorene så

$$Sp(\vec{a}_{i_1},\dots,\vec{a}_{i_k}) = Sp(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n),$$

og $\vec{a}_{i_1},\dots,\vec{a}_{i_k}$ er lineært uavhengige.

EKS: La $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ være vektorer i $\mathbb{R}^3$.



$\vec{a}_2$. Dersom $\vec{a}_2$ er på linja kaster vi den vekk.

Bevis: • Dersom vektorene allerede er lineært uavhengige er ferdig.

• Ellers kan vi skrive

$$x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{a}_n = 0$$

der ikke alle x_j'ene er null. Anta f.eks. at $x_1 \neq 0$.

$$x_1 \vec{a}_1 = -x_2 \vec{a}_2 - x_3 \vec{a}_3 - \dots - x_n \vec{a}_n$$

$$\vec{a}_1 = -\frac{x_2}{x_1}\vec{a}_2 - \frac{x_3}{x_1}\vec{a}_3 - \dots - \frac{x_n}{x_1}\vec{a}_n$$

Vi har da at

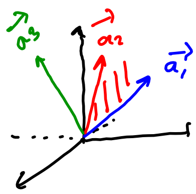
$$y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 + \dots + y_n\vec{a}_n = y_1\cdot\left(-\frac{x_2}{x_1}\vec{a}_2 - \dots - \frac{x_n}{x_1}\vec{a}_n\right) + y_2\vec{a}_2 + \dots + y_n\vec{a}_n,$$

så $Sp(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = Sp(\vec{a}_2, a_3, \dots, \vec{a}_n)$.

Fortsett til du sitter igjen med lineært uavhengige vektorer. ∎

Merk: Dersom $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ er lineært uavhengige så har vi $n \leq m$.

EKS:



BASISER

DEF: En basis for $\mathbb{R}^m$ er en lineært uavhengig mengde vektorer $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$

s.a.
$$Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \mathbb{R}^m .$$

Det vil si at enhver vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ kan skrives unikt
$$\vec{b} = x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{a}_n .$$

I så fall har vi $m = n$.

SETNING 4.6.10: En mengde vektorer $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ utgjør en basis hvis og bare hvis $n = m$ og
$$\mathrm{rref}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = I_n .$$

KOROLLAR 4.6.11 En mengde vektorer $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ er en basis dersom de enten utspenner $\mathbb{R}^n$ eller er lineært uavhengige.

SETNING 4.6.12 La $\vec{a}_j$, $j = 1, \dots, n$, være en mengde lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^m$.
Da fins vektorer $\vec{a}_j$, $j = n+1, \dots, m$
s.a. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ utgjør en basis.

EKS: