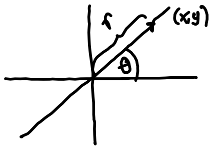
GRAFISKE FREMSTILLINGER (3.7)

Polarkoordinater: Gitt en vinkel $\theta \in [0, 2\pi)$ og et reelt tall $r \geq 0$ bestemmer et punkt

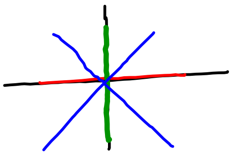


$$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

i $\mathbb{R}^2$, og omvendt kan ethvert punkt uttrykkes på denne måten.

Se på funksjonen $f(x,y) = x^2 - y^2$.

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta$$
$$= r^2(2\cos^2\theta - 1).$$



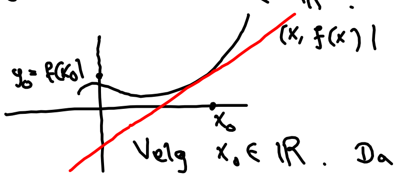
$g = r^2$

$g = -r^2$

$g = 0.$

TANGENTPLAN

Se først i $\mathbb{R}^2$.



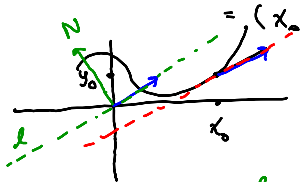
Velg $x_0 \in \mathbb{R}$. Da er lineariseringen til f i x_0 er

$$T_{x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Grafen til $T_{x_0} f$ = TANGENTLINJA TIL GRAFEN I (x_0, y_0).

Tangentlinja kan parametriseres:

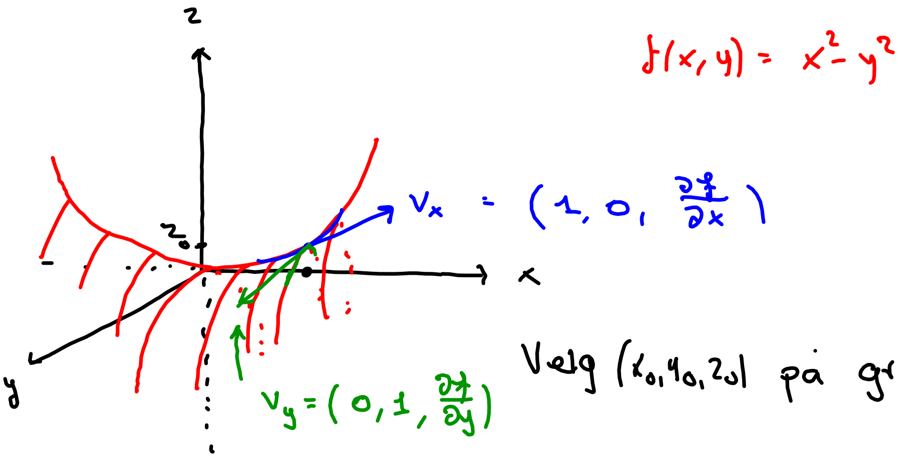
$$(x, y_0 + f'(x_0)(x - x_0)) =$$
$$(x_0, y_0) + (x - x_0, f'(x_0)(x - x_0))$$
$$= (x_0, y_0) + (x - x_0)\cdot \underbrace{(1, f'(x_0))}_{}$$



Sett $N = (-f'(x_0), 1)^{\nu_{x_0}}$

$$\ell = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : N \cdot (x,y) = 0\}.$$

$$\boxed{\text{Tangentplanet} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : N \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0\}.}$$



Velg (x_0, y_0, z_0) på grafen.

v_x og v_y definerer et plan som kalles tangentplanet til flaten.

$$N_x = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, 0, 1\right)$$

$$N_y = \left(0, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

Har nå at $N_{(x_0,y_0)} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$ står vinkelrett på både v_x og v_y.

<u>DEF:</u> Tangentplanet i $P = (x_0, y_0, z_0)$ er definert ved

$$T_p = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 = N_{(x_0,y_0)} \cdot (x-x_0, y-y_0, z-z_0)\}$$

For en funksjon $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$,
som er deriverbar i (x_0, y_0) i A,
så er tangentplanet i $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
definert ved ligningen

$$0 = \underbrace{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), 1\right)}_{\text{Normalvektoren.}} \cdot (x-x_0, y-y_0, z-z_0).$$

OMSKRIVING: $0 = -\nabla f(x_0,y_0) \cdot (x-x_0, y-y_0) + z - z_0$

LINEARISERINGEN TIL f: $z = z_0 + \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x-x_0, y-y_0)$

EKS: La $f(x,y) = x^3y - xy^4$.
Finn en normalvektor og tangentplanet i $(1,1,0)$.

Normalvektor: $\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), -\frac{\partial f}{\partial y}(1,1), 1\right)$

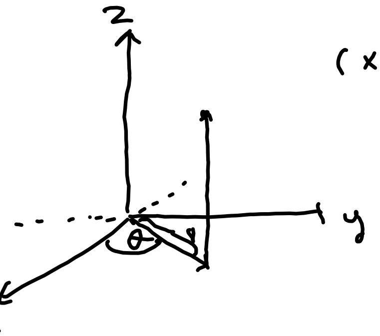
$$= (-2, 3, 1).$$

Tangentplanet er gitt ved

$$0 = (-2, 3, 1)(x-1, y-1, z)$$

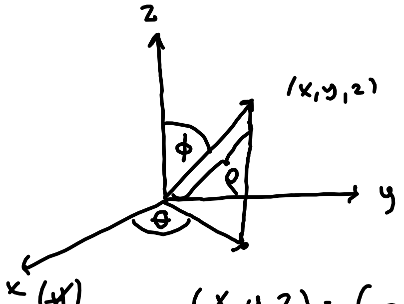
$$= -2(x-1) + 3(y-1) + z = 0$$

Sylinderkoordinater: Kombi av polarkoordinater og kartesiske koordinater på $\mathbb{R}^3$.



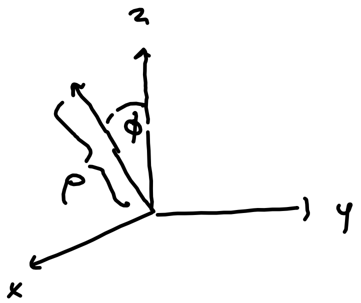
$$(x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

Kulekoordinater: $\phi \in [0,\pi]$
$\theta \in [0, 2\pi]$
$\rho \in [0, \infty)$.



(*) $(x,y,z) = (\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi)$.

BEGRUNNELSE FOR (*)



$\rho\cdot(\sin\phi, 0, \cos\phi)$

Må nå rotere med en vinkel θ i (x,y)-planet.

Rotasjonsmatrise: $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Multipliser (x,y)-komponenten med A_θ så får vi (*).