BASISER

En mengde vektorer $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ i $\mathbb{R}^n$ er basis dersom

- de er lineært uavhengige
- $Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \mathbb{R}^n$

· En mengde vektorer $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ i $\mathbb{R}^n$ er en basis hvis og bare hvis $\text{rref}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = I_n$.

· Anta at $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ utgjør en basis, og la $A = (\vec{a}_1, \dots, a_n)$.
Dersom $A \sim B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ så er $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ også en basis.

EKSEMPEL: Sett

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Finn $\vec{a}_3$ s.a. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ utgjør en basis for $\mathbb{R}^3$.

Metode 1: Velg $\vec{a}_3$ vilkårlig og sjekk om $\text{rref}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = I_n$.
Veldig uflaks hvis ikke.

Metode 2:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{I \leftrightarrow III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{II - 3\cdot I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \overset{III + 2\cdot I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III + \frac{2}{5} II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi har at $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en basis.
Reverserer radoperasjonene over.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.8. ELEMENTÆRE MATRISER

Viktige fordi de er "enkle" og de er byggesteiner for andre matriser.

DEF: En $n \times n$-matrise sies å være elementær dersom den fremkommer fra I_n ved å utføre en radoperasjon.

Eks: (i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

SETNING 4.8.2. La E være en elementær $n \times n$-matrise, og la A være en $n \times m$-matrise. La A' være matrisen du får ved å utføre radoperasjonen tilsvarende E på A. Da har vi $A' = EA$.

"Bevis:" Eksempel

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+3a_{31} & a_{22}+3a_{32} & a_{23}+3a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

SETNING 4.8.2 Enhver elementærmatrise er invertibel og den inverse er en elementær matrise.

Bevis: Reverser radoperasjonene så får vi en invers.

SETNING 4.8.4 Enhver $n \times m$-matrise A kan skrives som et produkt

$$A = E_1 E_2 \dots E_K B$$

der $E_1, \dots, E_K$ er elementære matriser og $B = \mathrm{rref}(A)$.

Dersom A er invertibel kan A skrives som et produkt av elementærmatriser.

Bevis: $F_K \dots F_2 F_1 A = B = \mathrm{rref}(A)$, der $F_1, F_2, \dots, F_K$ er elementære matriser.

Enhver elementær matrise er invertibel der inversen er en elementær matrise.
Så det elementærmatriser E_j s.a. $E_j F_j = I_n$.

$$\underbrace{E_1 \dots \underbrace{E_{K-1} \overbrace{E_K F_K}^{I_n} F_{K-1}}_{E_{K-1} I_n F_{K-1}} \dots F_2 F_1}_{I_n} A = E_1 \dots E_{K-1} E_K B$$

$E_{K-1} I_n F_{K-1} = I_n$, $\vdots$

Så $A = E_1 E_2 \dots E_K B$. ∎

EKS: Skriv $\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$ som et produkt av elementærmatriser.

Radreduser
$$\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\overset{II-I}{\sim}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\overset{I-2II}{\sim}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Med elementærmatriser
$$\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Da får vi at
$$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

Som gir
$$\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\ \checkmark.$$

DETERMINANTER

Husk at dersom A er en 2×2 matrise så er determinanten $\det(A)=|A|$ lik
$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

Viktig: $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ skalerer arealer med $|A|$.

Dersom A er en 3×3 matrise:
$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})$$
$$+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}\cdot a_{31}).$$

Vi ønsker nå å definere determinanten for $n\times n$-matriser.

Vi gjør det ved induksjon på n.

- Vi har definert denne for $n=2$,
- Anta at vi har definert determinanten for $(n\times n)$-matriser, $n\geq 2$.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1,n+1}\\\vdots&&&\vdots\\a_{n+1,1}&a_{n+1,2}&\cdots&a_{n+1,n+1}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot|A_{11}|-a_{12}\cdot|A_{12}|+a_{13}|A_{13}|-\dots(-1)^{n+2}\cdot a_{1,n+1}\cdot|A_{1,n+1}|.$$

A_{ij} er matrisen du får hvis du fjerner i'te rad og j'te kolonne.

Dette er definisjonen av determinanten for generelle matriser.

SETNING 4.9.1 Dersom en rad eller en kolonne i en $n\times n$-matrise A er $\vec{0}$ da er
$$|A|=0$$

Bevis: Induksjon på n.

$n=2$: $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=0.$

Anta at det holder for $n\geq2$.
$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1,n+1}\\\vdots&&&\vdots\\a_{n+1,1}&\cdots&&a_{n+1,n+1}\end{vmatrix}=a_{11}|A_{11}|-a_{12}|A_{12}|+\dots\pm a_{1,n+1}|A_{1,n+1}|$$
$$=0.$$