REKKER MED POSITIVE LEDD

Grensesammenligningstesten (12.2.8)

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ være positive rekker.

(i) Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer og at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty .$$

Da konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

(ii) Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergerer og at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} > 0.$$

Da divergerer $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Bevis: (i) Anta at $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = R$.

Da må det finnes $N \in \mathbb{N}$ så

$$\frac{b_n}{a_n} \leq R+1$$

når $n \geq N$. Da har vi at

$$b_n \leq (R+1)\, a_n$$

når $n \geq N$.

Da sier sammenligningstesten at

$$\sum_{n=N}^{\infty} b_n$$

konvergerer. Da konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ også.

Vis (ii) som en oppgave. ■

Eksempel: Undersøk om rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+4n}{8n^4-2}$$

konvergerer eller divergerer.

Da har vi $b_n = \frac{3n^2+4n}{8n^4-2}$ og vi må finne a_n'er.

$$b_n = \frac{(3+4/n)}{n^2(8-2/n^2)}$$

Vi setter $a_n = \frac{1}{n^2}$ (Vet at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer)

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{3+4/n}{8-2/n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{8}.$$

Så rekka konvergerer.

Forholdstesten (12.2.12)

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en positiv rekke og anta at

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

eksisterer.

(i) Dersom $a<1$ konvergerer rekka.

(ii) Dersom $a>1$ divergerer rekka.

(iii) Dersom $a=1$ kan man ikke konkludere.

Bevis: (i) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1$

Velg $a < r < 1$

Da fins $N \in \mathbb{N}$ s.a.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$$

for $n \geq N$. Da får vi at

$$a_{n+1} \leq a_n \cdot r$$

for $n \geq N$.

Da får vi: $a_{N+1} \leq a_N \cdot r$. $a_{N+2} \leq a_{N+1} \cdot r \leq a_N \cdot r \cdot r = a_N \cdot r^2$

..... $a_{N+K} \leq a_N \cdot r^K$.

Da har vi $\underbrace{\sum_{K=0}^{\infty} a_{N+K}}_{\text{Konvergent}} \leq \sum_{K=0}^{\infty} a_N \cdot r^K = a_N \underbrace{\sum_{K=0}^{\infty} r^K}_{\text{Konvergent}}$.

Da konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ også. ∎

EKSEMPEL: Avgjør om $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ konvergerer eller divergerer.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}\cdot n} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

Så rekka konvergerer.

Rottesten (12.2.16)

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en positiv rekke og anta at

$$a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

eksisterer.

(i) Dersom $a<1$ konvergerer rekka.

(ii) Dersom $a>1$ divergerer rekka.

(iii) $a=1$ gir ingen konklusjon.

Bevis: (i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a < 1$.

Velg r s.a. $a<r<1$.

Da fins $N \in \mathbb{N}$ s.a.

$$\sqrt[n]{a_n} \le r$$

når $n \geq N$. Da får du

$$a_n \le r^n$$

når $n \geq N$.

Da konvergerer $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$, og da også $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

EKS: Avgjør om $\sum_{n=1}^{\infty} (2+1/n)^{-n}$ konvergerer eller divergerer.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2+1/n}\right)^n} = \frac{1}{2+1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Da sier rottesten at rekka er konvergent.

12.3. ALTERNERENDE REKKER

Vi sier at en rekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er <u>alternerende</u> dersom a_{n+1} alltid har motsatt fortegn av a_n.

Så en alternerende rekke er på formen

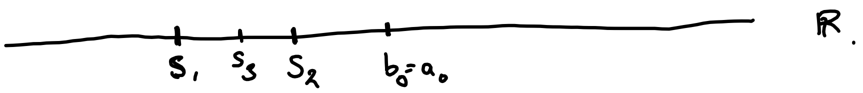
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n \quad \text{eller} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$$

der $b_n \geq 0$ for alle n.

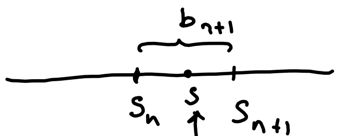
<u>EKS</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Konvergerer denne rekka?

<u>SETNING</u>. Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er en alternerende rekke og anta at $|a_n|$ avtar mot 0 når $n \to \infty$.
Da konvergerer rekka. Og $|s_n - s| \leq |a_{n+1}|$.
(s: grensen)

<u>Bevis</u>: Skriv $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n$, $b_n = |a_n| \geq 0$.



$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{b_0 - b_1}_{S_1} + b_2}_{S_2} - b_3}_{S_3} \cdots$$



alle delsummer for $k \geq n+1$ ligger her.

For $k, m \geq n+1$ så har

$$|S_k - S_m| \leq b_{n+1}$$

Siden $b_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ følger at $\{S_n\}$ er Cauchy-følge, så $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$.

Vi får: $|S - S_n| \leq b_{n+1} = |a_{n+1}|$.

12.4 ABSOLUTT OG BETINGET KONVERGENS.

DEF (12.4.1) Vi sier at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er absolutt konvergent dersom $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.

SETNING 12.4.2 En absolutt konvergent rekke er konvergent.

Bevis: Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergerer.

La
$$\hat{S}_K = \sum_{n=0}^{K} |a_n|$$
$$S_K = \sum_{n=0}^{K} a_n$$

Vil vise at $\{S_K\}$ er Cauchy.
Vi vet at $\{\hat{S}_K\}$ er Cauchy så for $\varepsilon > 0$ fins $N \in \mathbb{N}$ s.a. for $N \leq m < K$ så har vi
$$|\hat{S}_K - \hat{S}_m| < \varepsilon.$$
Da har vi
$$|S_K - S_m| = \left|\sum_{n=m+1}^{K} a_n\right| \leq \sum_{n=m+1}^{K} |a_n|$$
$$= |\hat{S}_K - \hat{S}_m| < \varepsilon.$$
■

12.5 Rekker av funksjoner.

Vi skal nå se på rekker av funksjoner
$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$$
der v_n er en funksjon $v_n : A \to \mathbb{R}$ der $A \subset \mathbb{R}$.

EKS: La $v_n(x) = x^n$. Da har vi
$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$
Da vet vi $v(x)$ eksisterer for $x \in (-1,1)$, og vi vet til og med at
$$v(x) = \frac{1}{1-x}$$
for alle $x \in (-1,1)$.

DEF: For en rekke $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ definerer vi den nte delsummen til å være
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} v_n(x).$$
Vi sier at rekka konverger punktvis på A dersom $S_n(x)$ konvergerer for hver fikserte $x \in A$.
Vi sier at rekka konvergerer uniformt på A dersom der $\{S_n\}$ konvergerer uniformt på A.