12.5 REKKER AV FUNKSJONER

12.5.1 Weierstrass M-test.

La $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ være en rekke av funksjoner $v_n : A \to \mathbb{R}$. Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ er konvergent og at $|v_n(x)| \leq M_n$ for alle n.

Da konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ uniformt og absolutt på A.

Bevis: Fikser en $x \in A$. Siden $|v_n(x)| \leq M_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$ så vet vi at $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n(x)| < \infty$. Men en absolutt konvergent rekke er konvergent, så $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$. Siden dette gjelder for alle x fins $v : A \to \mathbb{R}$ s.a. $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \to v(x)$ punktvis.

La nå $\varepsilon > 0$. Da fins $N \in \mathbb{N}$ s.a. $\sum_{n=N}^{\infty} M_n < \varepsilon$.

For $k \geq N$ så har vi

$$|v(x) - S_k(x)| = \left|\sum_{n=k+1}^{\infty} v_n(x)\right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |v_n(x)|$$

$$\leq \sum_{n=k+1}^{N} M_n < \varepsilon.$$

EKS 12.5.2 Vis at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ konvergerer uniformt på $[-1,1]$.

Vi har $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{|x|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

Vi vet at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, så vi kan sette $M_n = \frac{1}{n^2}$ i M-testen.

12.6 POTENSREKKER

En potensrekke er en rekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ der $a \in \mathbb{R}$.

Teorem 12.6.1

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ være en potensrekke.

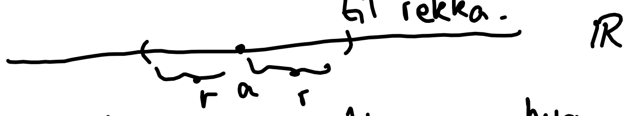
Da har vi en av følgende

(i) Rekka konvergerer for alle x.

(ii) Rekka konvergerer bare for $x = a$

(iii) Det fins $r > 0$ s.a. rekka konvergerer på $(a-r, a+r)$ og divergerer på $\mathbb{R} \setminus [a-r, a+r]$. r kalles konvergensradien til rekka.

i punkt (iii):



Teoremet sier ingenting om hva som skjer i endepunktene.

$\sum_n \frac{x^n}{n}$ konv. på $[-1,1)$

$\sum_n \frac{x^{2n}}{n}$ konv. på $(-1,1)$

- Mengden av alle punkter der rekka konvergerer kalles konvergensintervallet til rekka.

EKS: Vis at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergerer på hele $\mathbb{R}$.

Fikser en tilfeldig $x \in \mathbb{R}$.

Vil vise at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ er konvergent.

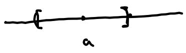
Forholdstest:

$$\frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{n!\,|x|^{n+1}}{(n+1)!\,|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Så rekka er konvergent.

Setning 12.6.8: Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ konvergerer i $(a-r, a+r)$. Da er grensen kontinuerlig på $(a-r, a+r)$.

Spørsmål: Hva hvis du også vet at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-r)^n$ eller $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ konvergerer? Er grensen kontinuerlig?



12.6.9 (Abels teorem). Summen $s(x)$ til en potensrekke er kontinuerlig i hele sitt konvergensintervall.

12.7 Regning med potensrekker

Anta at $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer på $(-r, r)$.

Hva er $\int s(x)\,dx$?

Integralet av et ledd $a_n x^n$ er $\frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

Setning 12.7.1 Anta at $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ har konvergensradius $r > 0$. Da konvergerer rekka

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{n+1} (x-a)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \frac{1}{n} (x-a)^n$$

på $(a-r, a+r)$ og

$$\int_a^x f(t)\,dt = g(x),$$

altså $g'(x) = f(x)$.

Setning 12.7.3

Anta at $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ har konvergensradius $r > 0$.

Da er f deriverbar, rekka

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (x-a)^{n-1}$$

konvergerer, og $f'(x) = g(x)$.

EKS 12.7.4 For $x \in (-1, 1)$ har vi

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$\Big\}$ Antiderivasjon $\Big\}$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

OBSERVER: Rekka konvergerer også for $x = 1$. Da definerer rekka en kontinuerlig funksjon på $(-1, 1]$ (Abel).

Da følger det at

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

siden begge funksjoner er kontinuerlige.

EKSEMPEL 12.7.5.

Skal vise at $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

For $x \in (-1,1)$ har vi at

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Integrer på begge sider.

$$\arctan(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}}$$

Konverger i punktet 1 så Abel forteller oss at rekka er kontinuerlig på $(-1,1]$

Da er begge funksjoner like på $(-1,1]$, og spesielt

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

EKS 12.8.5 Finn summen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Konvergerer på $(-1,1)$.

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Da har vi at

$$s(x) = -\log(1-x) + C$$

Evaluer i 0 og finn at $C = 0$.

12.8. Taylorrekke

La f være uendelig gange deriverbar nær et punkt $a \in \mathbb{R}$. Da definerer vi Taylorrekka til f i a:

$$Tf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

EKS: Dersom f er et polynom har vi $Tf = f$.

"Mange" funksjoner er lik sin egen Taylorrekke.

$$\boxed{\begin{aligned} &(i) \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ &(ii) \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &(iii) \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \end{aligned}}$$

Se på (ii). Taylorrekka til $\sin(x) = f(x)$ er

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{n!} x^k$$

Regn ut $f^k(0)$:

$\sin 0 = 0$
$\cos 0 = 1$
$-\sin 0 = 0$
$-\cos 0 = -1$
$\sin 0 = 0$
$\cos 0 = 1$
0
-1
0
1

Setning 12.8.3

La $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ konverer på et intervall $(a-r, a+r)$, $r>0$.
Da er $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ Taylorrekka til f.

EKS: Finn Taylorrekka til $e^{-x^2} = f(x)$.

$$Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} \cdot x^n$$

$f^0(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = -e^{-x^2} \cdot 2x$

$f''(x) =$:
:

Vi vet at $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{n!}}_{\text{Taylorrekka,}}$$

EKSEMPEL 12.8.6

Finn summen til $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = s(x)$ på $(-1,1)$.

Integrasjon av $s(x)$ gir funksjonen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

som tilfredsstiller $f'(x) = s(x)$.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

$$s(x) = f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$