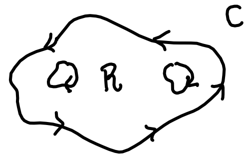
GREENS/STOKES TEOREM



$$\vec{F} = (P, Q)$$

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

Greens teorem har en generalisering til integraler over parametriserte flater i $\mathbb{R}^3$.

Curl: La $\vec{F} = (P, Q, R)$ være et vektorfelt med kontinuerlige partiellderiverte på et område i $\mathbb{R}^3$. Definer

$$\text{Curl}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Kan tenke på det som et formelt kryssprodukt

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, -\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right), \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Teorem 6.15.1 (Stokes)

Anta at $\mathcal{D}$ er en enkel lukket stykkevis glatt pos orientert kurve i (u,v) planet, og la A være området avgrenset av $\mathcal{D}$. La T være den parametriserte flaten gitt ved en glatt injektiv $\vec{r}: A \to \mathbb{R}^3$, og la $\mathcal{C} = \vec{r}(\mathcal{D})$. Da er

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\,d\vec{r} = \iint_T \text{Curl}\,\vec{F}\,dS,$$

for alle vektorfelt $\vec{F}$ som har kontinuerlige partiellderiverte nær T.

$\mathbb{R}^3$

6.6. JORDAN MÅLBARE MENGDER.

DEF: Vi sier at en begrenset mengde $A \subset \mathbb{R}^2$ er Jordan-målbar dersom funksjonen 1_A er integrerbar over A

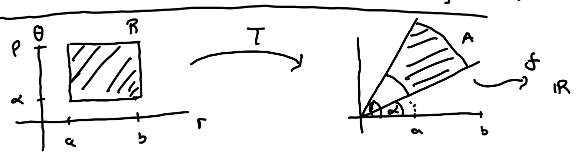
$$1_A(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in A \\ 0 & (x,y) \notin A. \end{cases}$$

Vi har: Områder av type I og II er Jordan målbare.

Teorem Anta at $A \subset \mathbb{R}^2$ er en lukket begrenset mengde. Da er en hver kontinuerlig $f : A \to \mathbb{R}$ integrerbar over A.

6.7 Skifte av variable i dobbeltintegralet.

Polarkoord:



(*) $$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta.$$

DEFINER $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

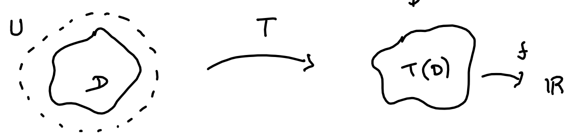
(*) $$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(T(r,\theta))\, r\,dr\,d\theta$$

Hva er r? $\det T'(r,\theta) = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

Teorem 6.7.1. La $U \subset \mathbb{R}^2$ være en åpen begrenset mengde og anta at $T : U \to \mathbb{R}^2$ er en injektiv funksjon med kontinuerlig partiellderiverte s.a. $\det T' \neq 0$ på hele U. Dersom $D \subset U$ er en lukket Jordan målbar mengde og $f : T(D) \to \mathbb{R}$ kontinuerlig, så er

$$\iint_{T(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(T(u,v)) \underbrace{|\det T'(u,v)|}_{*}\,du\,dv.$$

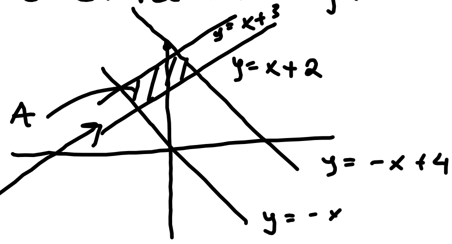


Notasjon: Skriv $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$

Der vi

$$|T'(u,v)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} \overset{\text{NOTASJON}}{=} \overbrace{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}^{*}.$$

EKS: Beregn $\int_A xy\,dx\,dy$ der A er området avgrenset av linjene



$y = -x$
$y = -x + 4$
$y = x + 2$
$y = x + 3$

T

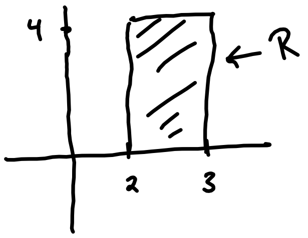
Vi har: $x+2 \le y \le x+3$

$2 \le y - x \le 3$

og $0 \le x + y \le 4$

Sett $u = y - x$ og $v = x + y$.

Da har vi $2 \le u \le 3$ og $0 \le v \le 4$.



$x = \frac{1}{2}(v-u)$

$y = \frac{1}{2}(u+v)$

$T(u,v) = \left(\frac{1}{2}(v-u), \frac{1}{2}(v+u)\right)$

$$\iint_A xy\,dx\,dy = \iint_R \frac{1}{2}(v-u)\cdot\frac{1}{2}(v+u)\cdot\left|\underline{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}\right|du\,dv$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

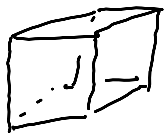
$$= \iint_R \frac{1}{4}(v^2-u^2)\cdot\frac{1}{2}\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{8}\int_2^3\int_0^4 v^2-u^2\,dv\,du$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

6.9. TRIPPELINTEGRALER

Dersom $B \subset \mathbb{R}^3$ er en begrenset mengde og $f : B \to \mathbb{R}$ er en funksjon, definerer vi integralet til f over B helt analogt med hva vi har gjort i dimensjon en og to, og vi skriver



$$\iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Setning (6.9.2, 6.9.3). La $R = [a_1,a_2] \times [b_1,b_2] \times [c_1,c_2]$ og la $f : R \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig. Da er f integrerbar over R og

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$

Man kan velge rekkefølgen til dx, dy og dz vilkårlig.

EKS: $R = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$
$f(x,y,z) = xy$.

$$\iiint_R xy\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 xy\,dz \right) dy \right) dx$$

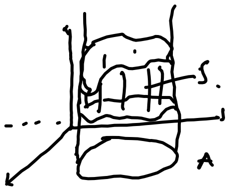
$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[xy \cdot z \right]_0^1 dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 xy\,dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{4}. \qquad \blacksquare$$

Setning 6.9.5 La $A \subset \mathbb{R}^2$ være en lukket begrenset Jordan målbar mengde. La $g, h : A \to \mathbb{R}$ være kontinuerlige funksjoner med $g \leq h$. La

$$S = \{ (x,y,z) : g(x,y) \leq z \leq h(x,y) \}.$$

Da er enhver kontinuerlig $f : S \to \mathbb{R}$ integrerbar over S



og
$$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_A \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy.$$

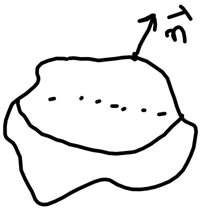
DIVERGENSTEOREMET.

Dersom $\vec{F} = (P, Q, R)$ er et vektorfelt på en mengde i $\mathbb{R}^3$ definerer vi divergensen til $\vec{F}$ ved

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Teorem 6.14.1 Anta at V er et lukket begrenset område i rommet som har en rand T satt sammen av endelig mange glatte parametriserte flater. Anta at $\vec{F}$ er et vektorfelt over V med kontinuerlige partiellderiverte.

$$\iint_T \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F} \, dxdydz.$$



Hjemmelekse: Se på skifte av variable i trippelintegralet.