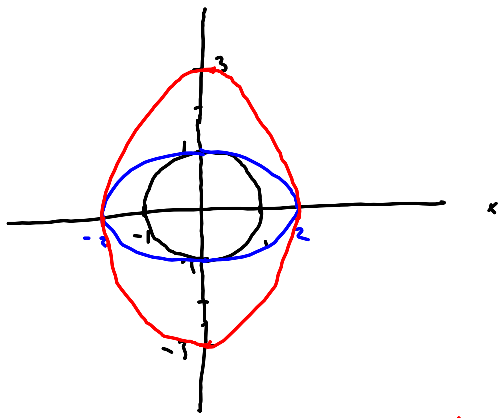
Kjeglesnitt

Ellipser

Enkleste eksempel på en ellipse er enhetssirkelen i $\mathbb{R}^2$. Den er definert ved $x^2+y^2=1$.



Ny ellipse definert ved $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$.

Vi kan skalere ut med hvilke faktorer $a,b>0$ vi vil og definere ellipser

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1.$$

Til slutt tillater vi oss å translatere ellipser, og vi definerer

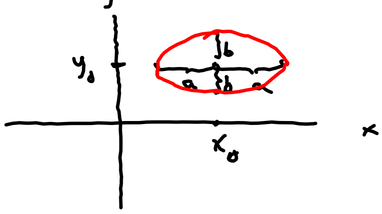
DEF: En ellipse er en mengde punkter $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ som tilfredsstiller

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1$$

der $a,b>0$ og $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

a og b kalles halvaksene til ellipsen.

EKSEMPEL:



EKSEMPEL: Se på funksjonen $f(x,y) = 2x^2 + y^2$.
Beskriv nivåkurvene til f.

En nivåkurve Γ_c:

$$\Gamma_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$$

for $c \in \mathbb{R}$.

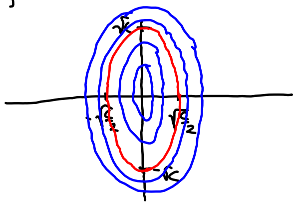
- $c < 0$. Eksisterer ikke.
- $c = 0$. Origo.
- $c > 0$.

$$\Gamma_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{2x^2 + y^2 = c}_{(*)}\}.$$

Omskriving av $(*)$:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{c}{2}}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{c}}\right)^2 = 1$$

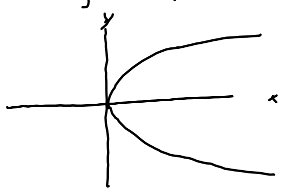
Γ_c er altså en ellipse med senter origo, og med halvakser $\sqrt{\frac{c}{2}}$ og $\sqrt{c}$.



Parabler

Eksempel: Mengden av punkter i $\mathbb{R}^2$ som tilfredsstiller

$$y^2 = x.$$



Hvis vi strekker ut i x- og y-retning med faktorer c og d får vi en parabel

$$\left(\frac{y}{d}\right)^2 = \frac{x}{c} \iff y^2 = \frac{d^2}{c} \cdot x,$$

Definerer like godt en parabel:

$$y^2 = bx$$

der $b \neq 0$.

Til slutt tillater vi oss å bytte om rollene til x og y, og å sentrere i et vilkårlig punkt (x_0, y_0).

DEF: En parabel er en mengde punkter i planet som tilfredsstiller enten

$$(y - y_0)^2 = b \cdot (x - x_0)$$

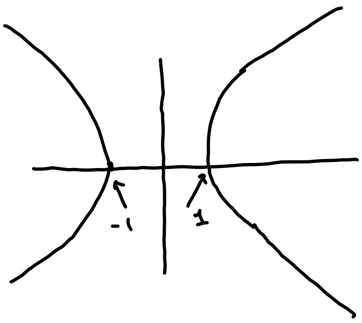
eller

$$(x - x_0)^2 = b(y - y_0),$$

hvor ... og $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Hyperbel.

EKSEMPEL: $x^2 - y^2 = 1$



$$\Updownarrow$$

$$x^2 = 1 + y^2$$

$$\Updownarrow$$

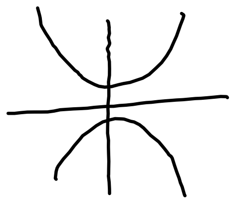
$$x = \pm\sqrt{1+y^2}$$

DEF: En hyperbel er en mengde punkter i $\mathbb{R}^2$ som tilfredsstiller enten

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1$$

eller

$$\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 - \left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 = 1, \leftarrow$$

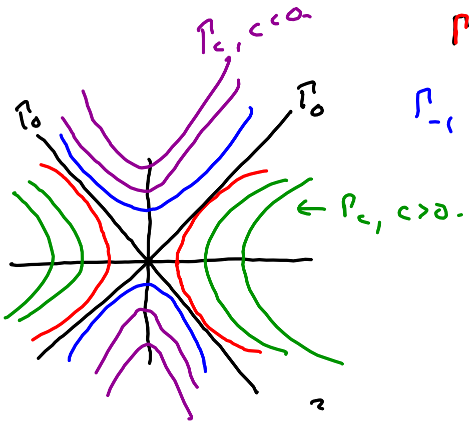


$a,b > 0$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

EKSEMPEL: Beskriv nivåkurver og grafen til funksjonen $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Beskriv

$$\Gamma_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = c\}.$$



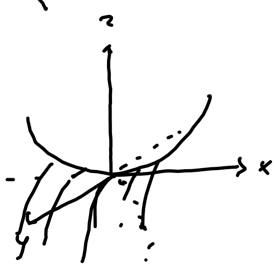
Γ_1: $x^2 - y^2 = 1$

Γ_{-1}: $x^2 - y^2 = -1$

$$\Updownarrow$$

$$y^2 - x^2 = 1$$

$\Gamma_0 = x^2 - y^2 = 0$.



VI GÅR NÅ VIDERE I KURSET OG STUDERER LIKNINGSSYSTEMER, MATRISER OG RELATERTE TEMAER.

4.1. Noen eksempler på Gauss-eliminasjon.

Vi ønsker generelt å løse lineære likningssystemer.

Et eksempel:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

spesielt enkelt å løse fordi systemet er på "triangulær" form.

Ønsker nå å løse:

$$\begin{aligned} 2y + z &= -1 \\ 3x + 5y + z &= 2 \\ x + 2y + z &= 1. \end{aligned}$$

Ekvivalent:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 3x + 5y + z &= 2 \\ 2y + z &= -1 \end{aligned}$$

Anta at du kan løse likningssystemet.

$$* \left\{ \begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 3x + 5y + z - 3(x + 2y + z) &= 2 - 3 = -1 \\ 2y + z &= -1 \end{aligned} \right.$$

Da hadde vi jo også løst det forrige systemet.

$$* \quad \begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -y - 2z &= -1 \\ 2y + z &= -1 \end{aligned}$$

Legg 2 ganger den andre likningen til den siste og få:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -y - 2z &= -1 \\ z &= 1 \end{aligned} \quad \sim \quad \begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \\ z &= 1. \end{aligned}$$