GAUSS-ELIMINASJON

Fra i går:

$$2y + z = -1$$
$$3x + 5y + z = 2$$
$$x + 2y + z = 1$$

$\rightsquigarrow$

$$x + 2y + z = 1$$
$$y + 2z = 1$$
$$z = 1$$

- Løsningen er lett å finne
- Løsningen er unik.

Et eksempel til:

$$x + 2y + z - u = 3$$
$$-x - y - 4z + 2u = -1$$
$$2x + 5y - z = 9$$
$$x + 7z - 5u = -3$$

$\downarrow$ II + I

$$x + 2y + z - u = 3$$
$$y - 3z + u = 2$$
$$2x + 5y - z = 9$$
$$x + 7z - 5u = -3$$

$\downarrow$ III − 2·I, IIII − I

$$x + 2y + z - u = 3$$
$$y - 3z + u = 2$$
$$y - 3z + 2u = 3$$
$$-2y + 6z - 4u = -6$$

$\downarrow$ III − II, IIII + 2·II

$$x + 2y + z - u = 3$$
$$y - 3z + u = 2$$
$$u = 1$$
$$u = 1$$

$\cdot -\frac{1}{2}$

$\leftarrow$

$$x + 2y + z - u = 3$$
$$y - 3z + u = 2$$
$$u = 1$$
$$0 = 0$$

Løsning:

$u = 1$

$y = 2 + 3z - 1 = 3z + 1$

$x = 3 - 2(3z+1) - z + 1 = 2 - 7z.$

Det finnes uendelig mange løsninger.

z kalles en fri variabel.

EKSEMPEL:

$$x - y + z - u = 1$$
$$2x - 2y - z + u = 0$$
$$-x + 2y + u = 2$$
$$2x - y + u = 2$$

$\downarrow$ noen steg

$$x - y + z - u = 1$$
$$y + z = 3$$
$$-3z + 3u = -2$$
$$0 = -1.$$

$x = 1$

$x = 0$

Ingen løsning!

VI SKAL NÅ IDENTIFISERE LIKNINGSSYSTEMER MED MATRISER

EKSEMPEL:

$$\begin{aligned} 2y + z &= -1 \\ 3x + 5y + z &= 2 \\ x + 2y + z &= 1 \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \quad \mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{III}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \quad \mathrm{II} - 3 \cdot \mathrm{I}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \quad \mathrm{III} + 2 \cdot \mathrm{II}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \quad \begin{matrix} \mathrm{III} \cdot -\frac{1}{3} \\ \mathrm{II} \cdot -1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned} \quad \longleftarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

8

4.2 TRAPPEFORM.

Vi skal jobbe med matriser

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

der a_{ij}'ene (stort sett) er reelle tall.

Radoperasjoner på A:

(i) Bytte om to rader.

(ii) Gange en rad med et tall $\neq 0$.

(iii) Legg et multiplum av en rad til en annen rad.

DEFINISJON: Vi sier at to matriser er rad-ekvivalente dersom den ene kan transformeres til den andre gjennom en sekvens av radoperasjoner.

$$A \overset{(i),(ii),(iii)}{\sim} B$$

Eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}\cdot I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{II-I}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{III+I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \overset{II \leftrightarrow III}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{II \cdot \frac{1}{5}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$

Merk at vi kan reversere prosessen, og starte med B, og ende opp med A.

DEF: En matrise A er på trappeform dersom

(i) Enhver rad som ikke bare består av nuller skal starte med et 1-tall.

(ii) Enhver rad som ikke bare består av nuller begynner med minst en null mer en raden over.

EKS:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} * & * & & * \end{matrix}$$

TERMINOLOGI: La A være på trappform.

- En ledende ener i en rad i A kalles et pivotelement.
- En søyle som inneholder et pivotelement kalles en pivotsøyle.

Tilbake til likninger:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Kan danne oss den utvidete matrisen for ligningssystemet:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$