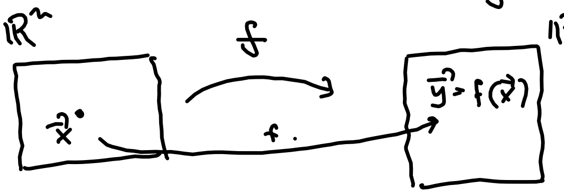
1.9 Lineæravbildinger.

En funksjon/avbilding fra $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en "regel", f, som til ethvert element $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tilordner et element $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$

Skjematisk:



Eksempler:

(i) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 - x_3,\ 5x_2 + 2x_3)$

(ii) $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + 3x_2 - x_3^3,\ 5\sin(x_2) + x_1^7)$

Vi skal begynne med å studere en klasse "enkle" avbildinger.

Merk at funksjonen (i) kan representeres ved en matrise

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Da ser vi at

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 0x_1 + 5x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

Husk fra matriseregning at

(a) $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$, for alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$

(b) $A(c \cdot \vec{x}) = c \cdot A(\vec{x})$, for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ og $c \in \mathbb{R}$.

og da tilfredsstiller f også disse egenskapen.

DEF 1.9.1 En avbilding $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sies å være en lineæravbilding dersom

(i) $T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$, for alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $T(c \cdot \vec{x}) = c\, T(\vec{x})$, for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$.

Merk: Enhver $(m \times n)$-matrise B vil tilsvarende definere en lineæravbilding fra $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Setning 1.9.4 Anta at $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en lineæravbilding. Da fins en $(m \times n)$-matrise A s.a. $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Bevis: Vi må finne

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

s.a. $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Vi har noen spesielle vektorer

$$\vec{e_j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j\text{'te plass}.$$

Ser på ligningene $A\vec{e_j} = T(\vec{e_j})$.

Men

$$A\vec{e_j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Men hvis vi ønsker at $A\vec{e_j} = \underline{T(e_j)}$ må vi ha

$$A = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & \dots & T(e_n) \end{bmatrix}.$$

Se på $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Da har vi at $\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e_1} + x_2 \cdot \vec{e_2} + \dots + x_n \cdot \vec{e_n}$

$$x_1\vec{e_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2\vec{e_2} \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vdots$$

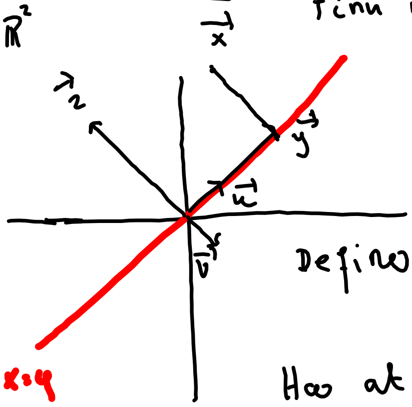
Merk at dersom S er lineær så har vi

$$\boxed{\begin{aligned} & S(c_1\vec{y_1} + c_2\vec{y_2} + \dots + c_k\vec{y_k}) \\ &= S((c_1\vec{y_1}) + (c_2\vec{y_2} + \dots + c_k\vec{y_k})) \quad \} (i) \\ &= S(c_1\vec{y_1}) + S(c_2\vec{y_2} + \dots + c_k\vec{y_k}) \\ &= c_1 S(\vec{y_1}) + S(c_2\vec{y_2} + \dots + c_k\vec{y_k}) \\ &\ \vdots \\ &= c_1 S(\vec{y_1}) + c_2 S(\vec{y_2}) + \dots + c_k S(y_k) \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} T(\vec{x}) &= T(x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \dots + x_n\vec{e_n}) \\ &= x_1 T(\vec{e_1}) + x_2 \cdot T(e_2) + \dots + x_n T(\vec{e_n}) \\ &= x_1 \cdot A\vec{e_1} + x_2 A\vec{e_2} + \dots + x_n A\vec{e_n} \\ &= A \cdot (x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \dots + x_n\vec{e_n}) \\ &= A\vec{x}. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

EKSEMPEL Speiling om linjen $x=y$ i $\mathbb{R}^2$.
Finn en matrise som representerer speiling.



Vil skrive $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$

Avbildingen blir da

$$\vec{x} \overset{T}{\longmapsto} \vec{y} - \vec{z}.$$

Definer $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Har at $e_1 = \vec{u} + \vec{v}$
$e_2 = \vec{u} - \vec{v}$

For $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ har vi da at

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 \\ &= x_1 \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + x_2 (\vec{u} - \vec{v}) \\ &= (x_1 + x_2)\vec{u} + (x_1 - x_2)\vec{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\vec{x}) &= (x_1 + x_2)\vec{u} - (x_1 - x_2)\vec{v} \\ &= (x_1 + x_2)\tfrac{1}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \\ &\quad - (x_1 - x_2)\tfrac{1}{2}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \\ &\overset{\text{regn ut}}{=} x_2 \vec{e}_1 + x_1 \cdot \vec{e}_2 \\ &= \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ser at $T(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$ og $T(\vec{e}_2) = \vec{e}_1$.

så vi må ha

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.9.1 EGENVERDIER OG EGENVEKTORER.

Se på matrisen $A = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$,

som defineres en avbildning $A: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Vi ønsker å "beskrive" matrisen A^n for store $n \in \mathbb{N}$.

$$\left(A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n\text{-ganger}} \right)$$

Merk at $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Så om vi definere $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

så har vi at $A\vec{v}_1 = \vec{v}_1$ og $A\vec{v}_2 = \frac{1}{2}\vec{v}_2$.

Vi har sett at alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ kan skrives

$$* \quad \vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

<u>Oppgave:</u> Bruk $*$ til å "beskrive" $A^n\vec{x}$ for $n \in \mathbb{N}$.