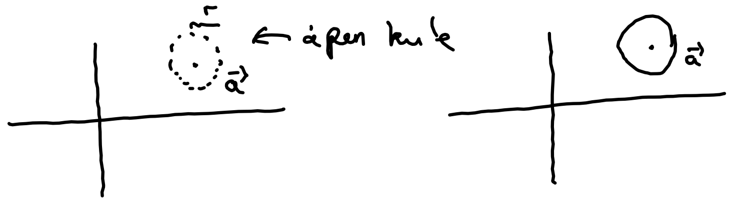
5.1 LITT TOPOLOGI I $\mathbb{R}^m$

DEF: La $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ og la $r > 0$.

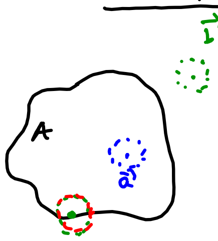
- $B(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : |\vec{x} - \vec{a}| < r\}$ kalles en åpen kule.
- $\overline{B}(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : |\vec{x} - \vec{a}| \leq r\}$ kalles en lukket kule.

For $m = 1$: $B(a, r) = (a - r, a + r)$
$\overline{B}(a, r) = [a - r, a + r]$

For $m = 2$:



DEF 5.1.1 La $A \subset \mathbb{R}^m$.



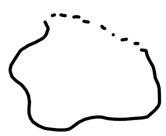
(i) $\vec{a} \in A$ er et indre punkt dersom det fins $r > 0$ s.a. $B(\vec{a}, r) \subset A$.

(ii) $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ kalles et ytre punkt dersom det fins $r > 0$ s.a. $B(\vec{b}, r) \cap A = \emptyset$.

(iii) $\vec{c} \in \mathbb{R}^m$ er et randpunkt dersom for alle $r > 0$ har vi at $B(\vec{c}, r)$ inneholder både punkter fra A og $\mathbb{R}^m \setminus A$.

DEF 5.1.2 En mengde $A \subset \mathbb{R}^m$ er lukket dersom den inneholder alle sine randpunkter. Den sies å være åpen dersom den ikke inneholder noen av sine randpunkter.

Spørsmål: For $a < b$, er $(a, b]$ en åpen mengde? lukket?



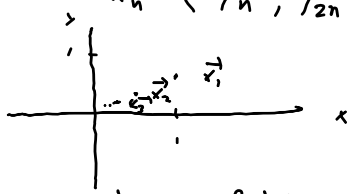
FØLGER I $\mathbb{R}^m$

En <u>følge</u> i $\mathbb{R}^m$ er en uendelig sekvens

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_n, \dots$$

av punkter.

<u>For eksempel, i $\mathbb{R}^2$</u>: $\vec{x}_n = (1/n, 1/2n)$, $n = 1, 2, \dots$



Vanlig å betegne følgen med $\{\vec{x}_n\}$ eller $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$, og vi tillater $\{x_n\}_{n=K}^{\infty}$, $K \in \mathbb{Z}$.

<u>DEF. 5.1.3</u> En følge $\{\vec{x}_n\} \subset \mathbb{R}^m$ konvergerer mot $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ fins $N \in \mathbb{N}$ s.a.

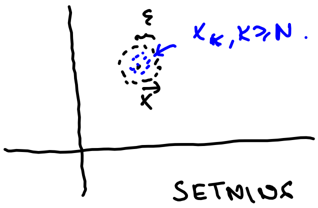
$$|\vec{x}_n - \vec{x}| < \varepsilon$$

når $n \geq N$.

Skrives: $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$

$\vec{x}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{x}$.

$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_n, \dots, x_N, x_{N+1}, \dots$



<u>SETNING 5.1.4</u> Anta $\vec{x}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{x}$, $\vec{y}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{y}$.

(i) $c\vec{x}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c\vec{x}$, $c \in \mathbb{R}$.

(ii) $(\vec{x}_n + \vec{y}_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{x} + \vec{y}$.

(iii) $(\vec{x}_n - \vec{y}_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{x} - \vec{y}$

(iv) $\vec{x}_n \cdot \vec{y}_n \to \vec{x} \cdot \vec{y}$.

<u>SETNING 5.1.5</u> Anta at $\{\vec{x}_n\}$ er en følge i $\mathbb{R}^m$. Skriv:

$$\vec{x}_n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_m^n).$$

Da har vi at

$$\vec{x}_n \longrightarrow \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

hvis og bare hvis $x_j^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_j$ for $j = 1, 2, \dots, m$.

EKS : Finn grensen til $\left\{ \begin{pmatrix} n^2/n^2+1 \\ n \sin \frac{1}{n} \\ (2+\frac{2}{n})^n \end{pmatrix} \right\} = \{\vec{x}_n\} \subset \mathbb{R}^3$

når $n \to \infty$.

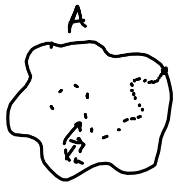
(i) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2(1+1/n^2)} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{1+1/n^2} = 1.$

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{1/n} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\cos(\frac{1}{n}) \cdot -\frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}}$ $= 1.$

(iii) $\lim\limits_{n \to \infty} (1+2/n)^n = \ldots = e^2.$

Så grensen er $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ e^2 \end{pmatrix}$.

SETNING 5.1.6 Anta at A er lukket i $\mathbb{R}^m$ og at $\{\vec{x}_n\} \subset A$. Dersom $\vec{x}_n \to \vec{x} \in \mathbb{R}^m$ så har vi at $\vec{x} \in A$.



Bevis: Anta for motsigelse at $\vec{x} \notin A$.

$\vec{x}$ er da et randpunkt.

- For alle $r>0$ så har vi at $B(\vec{x}, r)$ inneholder punkter fra $\mathbb{R}^m \setminus A$.
- For alle $r>0$ inneholder $B(\vec{x}, r)$ punkter fra A.

Per def: $\vec{x} \in A$.

Motsigelse! Så $\vec{x} \in A$. ■

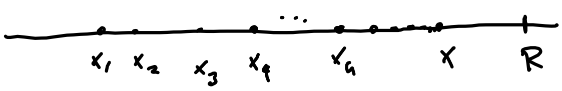
SETNING 5.1.7 La $F: A \to \mathbb{R}^m$ være en funksjon av n variable og la $\vec{a} \in A$.

$$F \text{ er kontinuerlig i } \vec{a} \iff \left(\vec{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{a}\right) \Rightarrow F(\vec{x}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(\vec{a}).$$

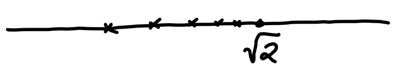
5.2 KOMPLETTHET AV $\mathbb{R}^m$.

Husk fra Kalkulus: La $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ der $x_n \le x_{n+1}$ for alle n, og anta at det fins $R>0$ s.a. $x_n \le R$ for alle n. Da fins $x \in \mathbb{R}$ sa.

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x.$$



Bytt ut $\mathbb{R}$ med $\mathbb{Q}$. Da er det ikke sant.



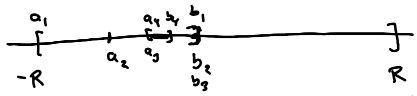
La nå $\{\vec{x}_n\}$ være en følge i $\mathbb{R}^m$.
Dersom $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$
så kalles vi følgen $\{\vec{y}_k\}$ definert ved
$\vec{y}_k = \vec{x}_{n_k}$ en delfølge av $\{\vec{x}_n\}$.

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}, \dots$$
$$\vec{y}_1 \quad \vec{y}_2 \quad \vec{y}_3 \quad \dots \quad \vec{y}_p \quad \dots$$

Prop. 5.2.2 Dersom $\vec{x}_n \to \vec{x}$ så vil alle delfølger av $\{\vec{x}_n\}$ og konvergere mot $\vec{x}$.

Teorem 5.2.3 (Bolzano-Weierstrass)
La $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^m$ være en følge s.t.k at det fins $R > 0$ s.a. $|x_n| \leq R$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
Da har $\{x_n\}$ en konvergent delfølge.

Bevis: La oss bevise det først for $n = 1$.



Da må det være uendelig mange x_n'er i enten $[-R, 0]$ eller $[0, R]$.
Kall dette intervallet $[a_1, b_1]$
Del $[a_1, b_1]$ i to like lange intervaller.
Ett av disse $[a_2, b_2]$ må inneholde uendelig mange elementer.

⋮

Fortsett og konstruere intervaller $[a_k, b_k]$ på denne måten.
Da må det fins $\vec{x} \in \mathbb{R}$ s.a. $a_k \to \vec{x}$ når $k \to \infty$.

Velg $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ s.a. $n_k < n_{k+1}$ for alle k.

Da må $x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x$.

For generell m, bruk resultatet n ganger.

$$(x_1^n, x_2^n, \dots, x_m^n).$$

∎