5.2. FØLGER I $\mathbb{R}^m$

$\vec{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{x}$ dersom det for alle $\varepsilon > 0$ fins $N \in \mathbb{N}$ s.a.

$$|\vec{x}_n - \vec{x}| < \varepsilon$$

når $n \geq N$.

Gitt en følge $\{\vec{x}_n\}$. Hvordan kan vise at den konvergerer?

<u>DEF</u>: En følge $\{\vec{x}_n\}$ sies å være en Cauchy-følge dersom det for hver $\varepsilon > 0$ fins $N \in \mathbb{N}$ s.a. $|\vec{x}_n - \vec{x}_k| < \varepsilon$ når $n, k \geq N$.

<u>Lemma 5.2.5</u> En konvergent følge er en Cauchy-følge.

<u>Bevis</u>: Anta at $\vec{x}_n \to \vec{x}$. Gitt $\varepsilon > 0$ fins $N \in \mathbb{N}$ s.a. $|\vec{x}_n - \vec{x}| < \frac{\varepsilon}{2}$ når $n \geq N$.

For $n, k \geq N$: $|x_n - x_k| = |(x_n - x) + (x - x_k)|$

$$\leq |x_n - x| + |x - x_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

<u>Teorem 5.2.6.</u> Enhver Cauchy-følge er konvergent.

Det burde være sånn: Det fins N_1 s.a. $|x_n - x_k| < \frac{1}{2}$ når $n, k \geq N_1$.

Det fins $N_2 > N_1$ s.a. $|x_n - x_k| < \frac{1}{4}$ når $n, k \geq N_2$

<u>Bevis</u>: Det fins $N \in \mathbb{N}$ s.a. $|x_n - x_k| < 1$ når $n, k \geq N$.

Spesielt: $|x_n - x_N| < 1$ når $n \geq N$.

Så $\{\vec{x}_n\}$ er begrenset.

Da har vi sett at $\{\vec{x}_n\}$ har en konvergent delfølge $\vec{x}_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{x}$.

La $\varepsilon > 0$.

Det fins $N \in \mathbb{N}$ s.a. $|\vec{x}_n - \vec{x}_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ når $n, k \geq N$.

Det fins $n_k \geq N$ s.a. $|\vec{x}_{n_k} - \vec{x}| < \frac{\varepsilon}{2}$.

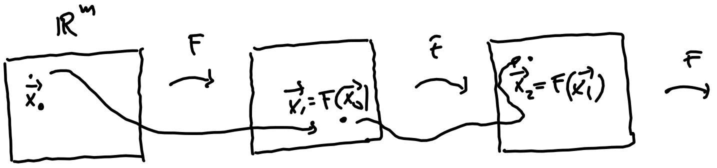
For $n \geq n_k$: $|\vec{x}_n - x| = |\vec{x}_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x|$

$$\leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

5.4 ITERASJON AV AVBILDINGER.

La $F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ være en avbilding.



Definerer en følge $\{\vec{x}_n\}$ ved å sette
$\vec{x}_{n+1} = F(\vec{x}_n)$.
Følgen $\{\vec{x}_n\}$ sies å oppstå ved iterasjon av F.

Notasjon: $F^n = \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{n\text{-ganger}}$. $\quad \vec{x}_n = F^n(\vec{x}_0)$.

5.5 Konvergens mot fikspunkter

DEF 5.5.1 La $A \subset \mathbb{R}^m$ og la $F: A \to \mathbb{R}^m$. Et punkt $\vec{x} \in A$ er et fikspunkt dersom $F(\vec{x}) = \vec{x}$.

HVORDAN FINNE ET FIKSPUNKT?

Banachs fikspunktteorem.

Teorem 5.5.4 La $A \subset \mathbb{R}^m$ være en ikke-tom lukket mengde, la $F: A \to A$ og anta at det fins $0 \le C < 1$ s.a.
$|F(\vec{x}) - F(\vec{y})| \le C \cdot |\vec{x} - \vec{y}|$ for alle $\vec{x}, \vec{y} \in A$.
Da har F et entydig fikspunkt $\vec{x}$.
Videre $\vec{x}_n = F^n(\vec{x}_0) \to \vec{x}$ for alle valg av $\vec{x}_0 \in A$.
Til slutt: $|\vec{x}_n - \vec{x}| \le \frac{C^n}{1-C} \cdot |\vec{x}_0 - \vec{x}_1|$.

Bevis: Entydighet. Anta at $\vec{x}$ og $\vec{y}$ er fikspunkter.

$$|F(\vec{x}) - F(\vec{y})| \le C \cdot |\vec{x} - \vec{y}|$$
$$\| $$
$$|\vec{x} - \vec{y}|$$

Dersom $|\vec{x} - \vec{y}| > 0$ har vi da

$$1 = \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{|\vec{x} - \vec{y}|} \le C < 1,$$

og det er ikke mulig. Så $\vec{x} = \vec{y}$.

Lemma 5.5.3. La $F: A \to A$ være en kontraksjon.
Da har vi at

$$|F^n(\vec{x}) - F^n(\vec{y})| \le C^n |\vec{x} - \vec{y}|$$

for alle $\vec{x}, \vec{y} \in A$.

Bevis: $|F(\vec{x}) - F(\vec{y})| \le C|\vec{x} - \vec{y}|$.

$$|\underbrace{F(F(\vec{x}))}_{F^2(\vec{x})} - \underbrace{F(F(\vec{y}))}_{F^2(\vec{y})}| \le C\,|F(\vec{x}) - F(\vec{y})| \le C \cdot C \cdot |\vec{x} - \vec{y}| = C^2|\vec{x} - \vec{y}|.$$

Fortsett! ■

Konvergens for en følge $\vec{x}_n = F^n(\vec{x}_0)$ vil være at $|\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n| \le C^n \cdot |\vec{x}_1 - \vec{x}_0|$.

Tilbake til beviset for Banachs fikspunktteorem.
Velg $\vec{x}_0$ vilkårlig.
Viser først at $\{\vec{x}_n\}$ konvergerer. Vil vise at $\{\vec{x}_n\}$ er en Cauchy-følge.
Må altså vise at for $\varepsilon > 0$ så fins $N \in \mathbb{N}$ s.a. $|\vec{x}_n - \vec{x}_k| < \varepsilon$ når $n, k \ge N$.
La $n < k$.

$$\begin{aligned}
|\vec{x}_n - \vec{x}_k| &= |(\vec{x}_n - \vec{x}_{n+1}) + (\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_{n+2}) + \dots + (\vec{x}_{k-1} - \vec{x}_k)| \\
&\le |\vec{x}_n - \vec{x}_{n+1}| + |\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n| + \dots + |\vec{x}_{k-1} - \vec{x}_k| \\
&\le C^n|\vec{x}_0 - \vec{x}_1| + C^{n+1}|\vec{x}_0 - \vec{x}_1| + \dots + C^{k-1} \cdot |\vec{x}_0 - \vec{x}_1| \\
&= |\vec{x}_0 - \vec{x}_1|(C^n + C^{n+1} + \dots + C^{k-1}) \\
&= |x_0 - x_1| \cdot C^n(1 + C + \dots + C^{k-n-1}) \\
&\le |x_0 - x_1| \cdot \frac{C^n}{1 - C}.
\end{aligned}$$

Velg N s.a. $\frac{|x_0 - x_1|}{1 - C} \cdot C^N < \varepsilon$.
Så $\{\vec{x}_n\}$ er en Cauchy-følge i $\mathbb{R}^m$, og $\vec{x}_n \to \vec{x} \in \mathbb{R}^m$. Siden A er lukket må $\vec{x} \in A$.

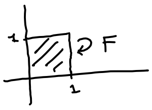
Siden F er kontinuerlig må $F(\vec{x}) = \vec{x}$.
(Liten oppgave).

SETNING 5.5.7. La $A \subset \mathbb{R}^m$ være en ikketom konveks mengde og la $F: A \to A$ være deriverbar med

$$\sqrt{|\nabla F_i(\vec{c}_i)|^2} \le C < 1$$

for alle $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m \in A$.
Da er F en kontraksjon.

EKS. Se på $F: [0,1]^2 \to [0,1]^2$ definert ved $F(x,y) = (\underbrace{\tfrac{1}{4}\sin(x^2 y) + \tfrac{1}{2}}_{F_1}, \underbrace{\tfrac{1}{3}y^2 + \tfrac{1}{5}}_{F_2})$.



Vis at F har et fikspunkt.

$$\nabla F_1(x,y) = (\tfrac{1}{4}2xy\cos(x^2y), \tfrac{1}{4}x^2\cos(x^2y))$$

$$\nabla F_2(x,y) = (0, \tfrac{2}{3}y).$$

$$|\nabla F_1(x,y)|^2 + |\nabla F_2(x,y)|^2 \le (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{4})^2 + (\tfrac{2}{3})^2 = \dots = \frac{109}{144} < 1.$$

Det følger fra forrige resultat at F har et unikt fikspunkt i $[0,1]^2$.