TRAPPEFORM

Panikkhjelp, oblig : RF-kjelleren, 18–21, onsdag.

DEF: En matrise er på trappeform dersom
(i) Enhver rad består enten bare av nuller, eller det første elementet som ikke er null er en ener.
(ii) Enhver rad som ikke bare består av nuller består av minst en null mer enn raden over.

Prop. Enhver matrise A er radekvivalent med en matrise på trappeform.

Bevis:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

jobb videre med denne.

anta at $a_{11} \neq 0$.

Anta at vi vil løse:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -x + y - z &= 0 \\ x + 5y + z &= 2 \end{aligned}$$

Utvidet matrise til likningssystemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{\text{II}+\text{I}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{III}-\text{I}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{III}-\text{II}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{II}\cdot\frac{1}{3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Likningssystemet:
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ y &= 1/3. \end{aligned}$$

løs det!
Uendelig mange løsninger med z som fri variabel

<u>Setning 4.2.4</u> Anta at den utvidete matrisen til et likningssystem kan reduseres til trappematrisen D. Da gjelder:

(i) Dersom den siste søylen til D er en pivotsøyle, har likningssystemet ingen løsninger.

Hvis ikke,

(ii) Dersom alle de andre søylene i D er pivotsøyler, har vi nøyaktig en løsning.

(iii) Dersom minst en av de andre søylene ikke er en pivotsøyle har vi uendelig mange løsninger.

EKS: (i)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \leftarrow 0 = 1. \\ \\ \\ \end{matrix}$$

(ii)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

LIKNINGSSYSTEMER MED SAMME VENSTRESIDE

Vi ser på en matrise

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ofte har man lyst til å løse

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

for varierende vektorer $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

SPØRSMÅL: NÅR HAR (*) EN (UNIK) LØSNING FOR ALLE VALG AV $\vec{b}$?

SETNING 4.2.6 Anta at A kan radreseres til en matrise D på trappeform. Da har likningen (*) en løsning for alle $\vec{b}$ hvis og bare hvis alle rader i D inneholder et pivot-element.

Bevis: Anta at alle rader i D inneholder et pivotelement. Vil løse (*).

Notasjon:

$$(A,\vec{b}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & b_2 \\ & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

Vi danner oss den utvidete matrisen $B = (A, \vec{b})$.
Radreduser B, med de samme radoperasjonene som brakte A til D.

$$(A, \vec{b}) \sim (D, \vec{c})$$

Ved forrige resultat har vi en løsning.

- Omvendt anta at D ikke har pivotelementer i hver rad.

$$D = \begin{bmatrix} & ? & \\ 0 & 0 \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Da består den siste raden i D bare av nuller.
Da fins $\vec{c}$ slik at du ikke kan løse "$D\vec{y} = \vec{c}$".
Radreduser $(D, \vec{c})$ til $(A, \vec{b})$.
Da kan du ikke løse (*) heller. ∎

Merk (Korollar 4.2.7.):

(*) har en unik løsning for alle $\vec{b}$ dersom A kan radreduseres til

$$D = \begin{bmatrix} 1 & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & 1 & d_{23} \cdots & d_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$$

(da er A en $(n \times n)$-matrise).

4.3. REDUSERT TRAPPEFORM

DEF. 4.3.1. Vi sier at en matrise er på redusert trappeform dersom den er på trappeform og alle elementene i pivotsøylene bortsett fra pivotelementene er null.

EKSEMPEL:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da er A på trappeform, men ikke redusert trappeform.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} I + 3 \cdot II \\ \sim \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Så vi har radredusert til redusert trappeform

Setning 4.3.2. Enhver matrise kan radreduseres til redusert trappeform