FLERVARIABEL ANALYSE OG LINEÆR ALGEBRA

På grunne av trøbbel med deling av iPad på Zoom under forelesningen, ble mye forelesningen gjennomgåt via slideshow uten mulighet til å skrive ved siden av. Dermed legger jeg ut mine egne notater.

ADVARSEL: dette er notater til meg selv, så de inneholder ikke alle detaljer som ville vært med på en forelensing. Detaljer finner du i læreboka.

1. Determinanter

Husk at dersom A er en 2×2-matrise så er determinanten $|A|$ lik

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

En grunn til at determinanter er viktige er at de angir hvordan avbildingen A skalerer areal. Som vi skal se senere er dette veldig viktig i teorien for integraler.

Dersom A er en 3×3-matrise så er determinanten $|A|$ lik

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}).$$

Igjen angir determinanten hvordan avbildingen A skalerer areal.

En annen viktig egenskap med determinanten er at det viser seg at en matrise A er invertibel hvis og bare hvis $|A| \neq 0$.

Vi har nå lyst til å definere determinanter for generelle $n \times n$-matriser. Vi skal gjøre dette via såkalt *induksjon* på n. Merk hvordan dette fungerte over.

Anta at vi har definert determinanten til en vilkårlig $(n-1) \times (n-1)$-matrise. For en $n \times n$-matrise A lar vi så A_{ij} være determinanten til matrisen vi får ved å slette rad i og kolonne j. Vi definerer

$$|A| = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} - ... + (-1)^{n+1}a_{1n}A_{1n}$$

Proposition 1.1. *(4.9.1) Dersom en rad eller en kolonne i en $n \times n$-matrise A består bare av nuller så er $|A| = 0$.*

Proof. Dette så vi bevis for forrige forelesning. $\square$

Proposition 1.2. *(4.9.2) Dersom en $n \times n$-matrise A er øvre eller nedre triangulær et determinanten produktet av diagonal-elementene.*

Proof. Dette ser vi direkte for 2×2-matriser. Etter det kan vi, analogt med hvordan vi beviste forrige proposisjon, vise det via induksjon over n. □

Theorem 1.3. *(4.9.9) Anta at A er en kvadratisk matrise. Da gjelder:*

(i) *Hvis A er øvre eller nedre triangulær, er determinanten lik produktet av diagonalelementene.*
(ii) *Bytter vi om to rader, bytter determinanten fortegn (men beholder sin tallverdi).*
(iii) *Ganger vi en rad med et tall s, endres determinanten med en faktor s.*
(iv) *Adderer vi et multiplum av en rad til en annen rad, endres ikke determinanten.*

For eksempel

$$a_{11}(a_{22} + sa_{12}) - a_{12}(a_{21} + sa_{11}) = |A|.$$

Lemma 1.4. *(4.9.11) La E være en elementærmatrise. Dersom E fremkommer ved å bytte om to rader i I_n så har vi $|E| = -1$. Dersom E fremkommer ved å gange en rad med et tall s så har vi $|E| = s$. Dersom E fremkommer ved å legge et multiplum av en rad til en anne så er $|E| = 1$.*

Lemma 1.5. *(4.9.12) La E være en elementær $n \times n$-matrise. og la A være en matrise. Da har vi $|EA| = |E| \cdot |A|$.*

Vi har nå (se Teorem 4.9.10): En $n \times n$-matrise A er invertibel hvis og bare hvis $|A| \neq 0$. Likningen $A\mathbf{x} = 0$ har uendelig mange løsninger hvis og bare hvis $|A| = 0$.

Theorem 1.6. *(4.9.10) For en $n \times n$-matrise A er følgende ekvivalent.*

(i) $\det(A) \neq 0$
(ii) *A er inverterbar*
(iii) *Matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning for alle $\mathbf{b}$*
(iv) *Matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har bare løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*
(v) *Søylene i A danner en basis for $\mathbb{R}^n$*
(vi) *A er radekvivalent med I_n*

Proof. Vi vet allerede at $(ii) - (vi)$ er ekvivalente.

Vi skriver
$$A = E_1 E_2 \ldots . E_k B,$$
der $B = \text{rref}(A)$. Da er B en øvre triangulær matrise. Vi har nå at
$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow |B| \neq 0.$$
Men nå er $|B| \neq 0 \Leftrightarrow B = I_n$. Så $|A| \neq 0 \Rightarrow A$ er invertibel.

På den annen side, dersom $|B| = 0$ så er ikke hver kolonne i B pivot. Så da har løsningen $B\mathbf{x} = 0$ uendelig mange løsninger, og $A\mathbf{x} = 0$ har uendelig mange løsninger. Da er A ikke invertibel.

□

Proposition 1.7. *(4.9.14) La A, B være $n \times n$-matriser. Da har vi at $|AB| = |A||B|$.*

Proof. Dersom A ikke er inverterbar fins en $\mathbf{b}$ slik at vi ikke kan løse $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, så da kan vi ikke løse $(AB)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, så AB er ikke inverterbar. Da vet vi at $|AB| = |A||B| = 0$.

Ellers skriv A som produkt av elementærmatriser.

□

Corollary 1.8. *(4.9.15)* $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

Corollary 1.9. *(4.9.16)* $|A^T| = |A|$.

1.1. **Langs andre rader.** Vi kan også regne ut determinanter ved å ekspandere langs andre rader enn den første.

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Egenvektorer og egenverdier (4.10)

Husk at for en $n \times n$-matrise A så er $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, en *egenvektor* med *egenverdi* λ dersom

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}. \tag{2.1}$$

Gitt en vektor $\mathbf{v}$ er det da relativt lett å sjekke om den er en egenvektor; man regner ut $A\mathbf{v}$ og sjekker. Men hvordan finne egenvektorer?

Merk først at $\lambda \mathbf{v} = \lambda I_n \mathbf{v}$. Det vil si at (2.3) er ekvivalent med

$$A\mathbf{v} = \lambda I_n \mathbf{v}. \tag{2.2}$$

som igjen er ekvivalent med

$$\lambda I_n \mathbf{v} - A\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow (\lambda I_n - A)\mathbf{v} = 0. \tag{2.3}$$

Så $\mathbf{v}$ er en egenvektor hvis og bare hvis den er en ikke triviell løsning til den homogene likningen

$$(\lambda I_n - A)\mathbf{v} = 0,$$

og denne har en løsning forskjellig fra null hvis og bare hvis

$$\det((\lambda I_n - A)) = 0.$$

(Teorem 4.9.10).

Vi kan formulere et lemma.

Lemma 2.1. *Vi har at λ er en egenverdi for A hvis og bare hvis*

$$\det((\lambda I_n - A)) = 0.$$

Eksempel 2.2. Vi vil finne egenverdier og egenvektorer for matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Vi har at λ er en egenverdi hvis og bare hvis

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 1 \\ -5 & \lambda + 2 \end{pmatrix} = 0$$

Det vil si hvis og bare hvis

$$(\lambda - 4)(\lambda + 2) + 5 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Vi får at egenverdiene er $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$.

For å finne en egenvektor tilhørende λ_1 løser vi likningen

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1.$$

og hvis vi setter $\mathbf{v}_1 = (x, y)$ så må vi løse

$$4x - y = 3x \text{ og } 5x - 2y = 3y$$

og dette er ekvivalent med

$$x = y \text{ og } 2x = 2y.$$

Her kan vi velge y fritt, for eksempel $y = 1$ og vi finner en egenvektor $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$.

Merk: det er mange valg av egenvektorer.

Helt analogt kan vi løse likningen $A\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2$ og vi finner $\mathbf{v}_2 = (1, 5)$.

Definisjon 2.3. (4.10.2) Dersom A er en $n \times n$-matrise kalles polynomet

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

det karakteristiske polynomet til A.

Proposition 2.4. *(4.10.3) La A være en $n \times n$-matrise, og at $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ er egenvektorer med forskjellige egenverdier $\lambda_1, ..., \lambda_k$. Da er $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ lineært uavhengige. Hvis $k = n$ danner egenvektorene således en basis for $\mathbb{R}^n$.*

2.1. **Multiple egenverdier.**

Eksempel 2.5. Vi vil finne egenverdiene og egenvektorene til

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Her har vi

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 2)\lambda + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Dermed fins det bare en egenverdi. For å finne egenvektorer løser vi

$$2x - y = x, x = y.$$

Dermed er $(1, 1)$ en egenvektor, men alle andre er multipler av denne. Så det fins ingen basis bestående av egenvektorer.

Merk man kan har multiple egenverdier men likevel en basis bestående av egenvektorer; se på identitetsmatrisen.

2.2. **Komplekse egenverdier.**

Eksempel 2.6. Vi vil finne egenverdiene og egenvektorene til

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Her har vi

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 + 9 = \lambda^2 - 2\lambda + 10$$

Vi har at $P_A(\lambda) = 0$ har løsninger

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm 6\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm 3\sqrt{-1}.$$

Her ser vi at det ikke fins *reelle* egenverdier i det hele tatt.

For å finne en egenvektor konsentrerer vi oss om $\lambda_1 = 1 + 3i$ løser vi

$$x - 3y = (1 + 3i)x, 3x + y = (1 + 3i)y$$

$$-3ix = 3y, 3x = 3yi$$

$$y = -ix.$$

Så en løsning er $\mathbf{v}_1 = (1, -i)$.

Vi påstår nå at $\mathbf{v_2} = (1, i)$ også er en egenvektor. Dette er fordi at $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ er den andre egenverdien og $\mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}_1}$, og vi har at

$$A\mathbf{v}_2 = \overline{A}\overline{\mathbf{v_1}} = \overline{A\mathbf{v_1}} = \overline{\lambda_1 \mathbf{v_1}} = \lambda_2 \mathbf{v}_2.$$

Proposition 2.7. *(4.10.4)*

2.3. **Egenverdier til symmetriske matriser.**

Theorem 2.8. *(4.10.6) La A være en symmetrisk $n \times n$-matrise. Da er alle egenverdiene til A reelle, og det fins en ortonormal basis $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ av egenvektorer for A.*

2.4. **Diagonalisering av matriser.** La A være en 2×2-matrise med lineært uavhengige egenvektorer $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Lag en tegning og vis at hvis du lager en matrise M med $M\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$, så har vi at

$$M^{-1}AM = D$$

der

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.9. *(4.10.8) La A være en $n\times n$-matrise med en basis $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ av egenvektorer for A. Sett $M = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$. Da har vi*

$$M^{-1}AM = D,$$

der D er matrisen med egenverdiene λ_j langs diagonalen.

2.5. **Egenverdier i MATLAB.**