Determinanter og egenverdier/vektorer

"Mer om determinanter, og egenverdier/vektorer"

Erlend Fornæss Wold

Matematisk Institutt
Universitetet i Oslo

March 27, 2023

4.9 Determinanter

Theorem

(4.9.9) Anta at A er en kvadratisk matrise. Da gjelder:

4.9 Determinanter

Theorem

(4.9.9) Anta at A er en kvadratisk matrise. Da gjelder:

(i) *Hvis A er øvre eller nedre triangulær, er determinanten lik produktet av diagonalelementene.*

Theorem

(4.9.9) Anta at A er en kvadratisk matrise. Da gjelder:

(i) *Hvis A er øvre eller nedre triangulær, er determinanten lik produktet av diagonalelementene.*

(ii) *Bytter vi om to rader, bytter determinanten fortegn (men beholder sin tallverdi).*

Theorem

(4.9.9) Anta at A er en kvadratisk matrise. Da gjelder:

(i) *Hvis A er øvre eller nedre triangulær, er determinanten lik produktet av diagonalelementene.*

(ii) *Bytter vi om to rader, bytter determinanten fortegn (men beholder sin tallverdi).*

(iii) *Ganger vi en rad med et tall s, endres determinanten med en faktor s.*

4.9 Determinanter

Theorem

(4.9.9) Anta at A er en kvadratisk matrise. Da gjelder:

(i) *Hvis A er øvre eller nedre triangulær, er determinanten lik produktet av diagonalelementene.*

(ii) *Bytter vi om to rader, bytter determinanten fortegn (men beholder sin tallverdi).*

(iii) *Ganger vi en rad med et tall s, endres determinanten med en faktor s.*

(iv) *Adderer vi et multiplum av en rad til en annen rad, endres ikke determinanten.*

4.9 Determinanter

Theorem

(4.9.9) Anta at A er en kvadratisk matrise. Da gjelder:

(i) *Hvis A er øvre eller nedre triangulær, er determinanten lik produktet av diagonalelementene.*

(ii) *Bytter vi om to rader, bytter determinanten fortegn (men beholder sin tallverdi).*

(iii) *Ganger vi en rad med et tall s, endres determinanten med en faktor s.*

(iv) *Adderer vi et multiplum av en rad til en annen rad, endres ikke determinanten.*

KONSEKVENS: Elementære matriser har determinant forskjellig fra null.

4.9 Determinanter

Theorem

(4.9.9) Anta at A er en kvadratisk matrise. Da gjelder:

(i) *Hvis A er øvre eller nedre triangulær, er determinanten lik produktet av diagonalelementene.*

(ii) *Bytter vi om to rader, bytter determinanten fortegn (men beholder sin tallverdi).*

(iii) *Ganger vi en rad med et tall s, endres determinanten med en faktor s.*

(iv) *Adderer vi et multiplum av en rad til en annen rad, endres ikke determinanten.*

KONSEKVENS: Elementære matriser har determinant forskjellig fra null.

Proposition

(4.9.14) La A, B *være* $n \times n$*-matriser. Da har vi at* $|AB| = |A||B|$.

Proposition

(4.9.14) La A, B *være* $n \times n$*-matriser. Da har vi at* $|AB| = |A||B|$.

Corollary

(4.9.15) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

Theorem

(4.9.10) For en $n \times n$-matrise A er følgende ekvivalent.

(i) $\det(A) \neq 0$

Theorem

(4.9.10) For en $n \times n$-matrise A er følgende ekvivalent.

(i) $\det(A) \neq 0$

(ii) *A er inverterbar*

Theorem

(4.9.10) For en $n \times n$-matrise A er følgende ekvivalent.

(i) $\det(A) \neq 0$

(ii) *A er inverterbar*

(iii) *Matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning for alle $\mathbf{b}$*

Theorem

(4.9.10) For en $n \times n$-matrise A er følgende ekvivalent.

(i) $\det(A) \neq 0$

(ii) *A er inverterbar*

(iii) *Matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning for alle $\mathbf{b}$*

(iv) *Matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har bare løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*

Theorem

(4.9.10) For en $n \times n$-matrise A er følgende ekvivalent.

(i) $\det(A) \neq 0$

(ii) *A er inverterbar*

(iii) *Matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning for alle $\mathbf{b}$*

(iv) *Matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har bare løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*

(v) *Søylene i A danner en basis for $\mathbb{R}^n$*

4.9 Determinanter

Theorem

(4.9.10) For en $n \times n$-matrise A er følgende ekvivalent.

(i) $\det(A) \neq 0$

(ii) *A er inverterbar*

(iii) *Matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning for alle $\mathbf{b}$*

(iv) *Matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har bare løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*

(v) *Søylene i A danner en basis for $\mathbb{R}^n$*

(vi) *A er radekvivalent med I_n*

4.9 Determinanter

Theorem

(4.9.10) For en $n \times n$-matrise A er følgende ekvivalent.

(i) $\det(A) \neq 0$

(ii) *A er inverterbar*

(iii) *Matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning for alle $\mathbf{b}$*

(iv) *Matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har bare løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*

(v) *Søylene i A danner en basis for $\mathbb{R}^n$*

(vi) *A er radekvivalent med I_n*

4.9 Determinanter - langs andre rader og søyler

Vi kan også regne ut determinanter ved å ekspandere langs andre rader enn den første.

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}.$$

4.9 Determinanter - langs andre rader og søyler

Vi kan også regne ut determinanter ved å ekspandere langs andre rader enn den første.

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}.$$

Eksempel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.10 Egenvektorer og egenverdier

4.10 Egenvektorer og egenverdier

Målet nå er å finne en metode for å finne egenverdier og egenvektorer. Vi starter med litt teori, og så skal vi gi flere eksempler.

4.10 Egenvektorer og egenverdier

Målet nå er å finne en metode for å finne egenverdier og egenvektorer. Vi starter med litt teori, og så skal vi gi flere eksempler.
Husk at for en $n \times n$-matrise A så er $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, en *egenvektor* med *egenverdi* λ dersom

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \tag{1}$$

4.10 Egenvektorer og egenverdier

Målet nå er å finne en metode for å finne egenverdier og egenvektorer. Vi starter med litt teori, og så skal vi gi flere eksempler.
Husk at for en $n \times n$-matrise A så er $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, en *egenvektor* med *egenverdi* λ dersom

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \tag{1}$$

Gitt en vektor $\mathbf{v}$ er det da relativt lett å sjekke om den er en egenvektor; man regner ut $A\mathbf{v}$ og sjekker. Men hvordan finne egenvektorer?

4.10 Egenvektorer og egenverdier

Målet nå er å finne en metode for å finne egenverdier og egenvektorer. Vi starter med litt teori, og så skal vi gi flere eksempler.
Husk at for en $n \times n$-matrise A så er $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, en *egenvektor* med *egenverdi* λ dersom

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \tag{1}$$

Gitt en vektor $\mathbf{v}$ er det da relativt lett å sjekke om den er en egenvektor; man regner ut $A\mathbf{v}$ og sjekker. Men hvordan finne egenvektorer?

Merk først at $\lambda\mathbf{v} = \lambda I_n\mathbf{v}$. Det vil si at (3) er ekvivalent med

$$A\mathbf{v} = \lambda I_n\mathbf{v}. \tag{2}$$

Målet nå er å finne en metode for å finne egenverdier og egenvektorer. Vi starter med litt teori, og så skal vi gi flere eksempler.
Husk at for en $n \times n$-matrise A så er $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, en *egenvektor* med *egenverdi* λ dersom

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \tag{1}$$

Gitt en vektor $\mathbf{v}$ er det da relativt lett å sjekke om den er en egenvektor; man regner ut $A\mathbf{v}$ og sjekker. Men hvordan finne egenvektorer?

Merk først at $\lambda\mathbf{v} = \lambda I_n\mathbf{v}$. Det vil si at (3) er ekvivalent med

$$A\mathbf{v} = \lambda I_n\mathbf{v}. \tag{2}$$

som igjen er ekvivalent med

$$\lambda I_n\mathbf{v} - A\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow (\lambda I_n - A)\mathbf{v} = 0. \tag{3}$$

4.10 Egenvektorer og egenverdier

Så **v** er en egenvektor hvis og bare hvis den er en ikke triviell løsning til den homogene likningen

$$(\lambda I_n - A)\mathbf{v} = 0,$$

4.10 Egenvektorer og egenverdier

Så $\mathbf{v}$ er en egenvektor hvis og bare hvis den er en ikke triviell løsning til den homogene likningen

$$(\lambda I_n - A)\mathbf{v} = 0,$$

og denne har en løsning forskjellig fra null hvis og bare hvis

$$\det(\lambda I_n - A) = 0.$$

(Teorem 4.9.10).

4.10 Egenvektorer og egenverdier

Så **v** er en egenvektor hvis og bare hvis den er en ikke triviell løsning til den homogene likningen

$$(\lambda I_n - A)\mathbf{v} = 0,$$

og denne har en løsning forskjellig fra null hvis og bare hvis

$$\det(\lambda I_n - A) = 0.$$

(Teorem 4.9.10).

Lemma

Vi har at λ er en egenverdi for A hvis og bare hvis

$$\det(\lambda I_n - A) = 0.$$

4.10 Egenvektorer og egenverdier

Example

Vi vil finne egenverdier og egenvektorer for matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Example

Vi vil finne egenverdier og egenvektorer for matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Vi har at λ er en egenverdi hvis og bare hvis

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 1 \\ -5 & \lambda + 2 \end{pmatrix} = 0$$

4.10 Egenvektorer og egenverdier

Example

Vi vil finne egenverdier og egenvektorer for matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Vi har at λ er en egenverdi hvis og bare hvis

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 1 \\ -5 & \lambda + 2 \end{pmatrix} = 0$$

Det vil si hvis og bare hvis

$$(\lambda - 4)(\lambda + 2) + 5 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

4.10 Egenvektorer og egenverdier

Example

Vi vil finne egenverdier og egenvektorer for matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Vi har at λ er en egenverdi hvis og bare hvis

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 1 \\ -5 & \lambda + 2 \end{pmatrix} = 0$$

Det vil si hvis og bare hvis

$$(\lambda - 4)(\lambda + 2) + 5 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Vi får at egenverdiene er $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$.

4.10 Egenvektorer og egenverdier

Example

For å finne en egenvektor tilhørende λ_1 løser vi likningen

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1.$$

4.10 Egenvektorer og egenverdier

Example

For å finne en egenvektor tilhørende λ_1 løser vi likningen

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1.$$

og hvis vi setter $\mathbf{v}_1 = (x, y)$ så må vi løse

$$4x - y = 3x \text{ og } 5x - 2y = 3y$$

Example

For å finne en egenvektor tilhørende λ_1 løser vi likningen

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1.$$

og hvis vi setter $\mathbf{v}_1 = (x, y)$ så må vi løse

$$4x - y = 3x \text{ og } 5x - 2y = 3y$$

og dette er ekvivalent med

$$x = y \text{ og } 2x = 2y.$$

4.10 Egenvektorer og egenverdier

Example

For å finne en egenvektor tilhørende λ_1 løser vi likningen

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1.$$

og hvis vi setter $\mathbf{v}_1 = (x, y)$ så må vi løse

$$4x - y = 3x \text{ og } 5x - 2y = 3y$$

og dette er ekvivalent med

$$x = y \text{ og } 2x = 2y.$$

Her kan vi velge y fritt, for eksempel $y = 1$ og vi finner en egenvektor $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$.

4.10 Egenvektorer og egenverdier

Example

For å finne en egenvektor tilhørende λ_1 løser vi likningen

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1.$$

og hvis vi setter $\mathbf{v}_1 = (x, y)$ så må vi løse

$$4x - y = 3x \text{ og } 5x - 2y = 3y$$

og dette er ekvivalent med

$$x = y \text{ og } 2x = 2y.$$

Her kan vi velge y fritt, for eksempel $y = 1$ og vi finner en egenvektor $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$.

Merk: det er mange valg av egenvektorer.

4.10 Egenvektorer og egenverdier

Example

For å finne en egenvektor tilhørende λ_1 løser vi likningen

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1.$$

og hvis vi setter $\mathbf{v}_1 = (x, y)$ så må vi løse

$$4x - y = 3x \text{ og } 5x - 2y = 3y$$

og dette er ekvivalent med

$$x = y \text{ og } 2x = 2y.$$

Her kan vi velge y fritt, for eksempel $y = 1$ og vi finner en egenvektor $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$.

Merk: det er mange valg av egenvektorer.
Helt analogt kan vi løse likningen $A\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2$ og vi finner $\mathbf{v}_2 = (1, 5)$.

Definition

(4.10.2) Dersom A er en $n \times n$-matrise kalles polynomet

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

det karakteristiske polynomet til A.

4.10 Egenvektorer og egenverdier

Definition

(4.10.2) Dersom A er en $n \times n$-matrise kalles polynomet

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

det karakteristiske polynomet til A.

Husk at det ofte er viktig å finne så mange lineært uavhengige egenvektorer som mulig.

4.10 Egenvektorer og egenverdier

Definition

(4.10.2) Dersom A er en $n \times n$-matrise kalles polynomet

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

det karakteristiske polynomet til A.

Husk at det ofte er viktig å finne så mange lineært uavhengige egenvektorer som mulig.

Proposition

(4.10.3) La A være en $n \times n$-matrise, og at $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ er egenvektorer med forskjellige egenverdier $\lambda_1, ..., \lambda_k$. Da er $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ lineært uavhengige. Hvis $k = n$ danner egenvektorene således en basis for $\mathbb{R}^n$.

Example

(Multiple egenverdier) Vi vil finne egenverdiene og egenvektorene til

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Example

(Multiple egenverdier) Vi vil finne egenverdiene og egenvektorene til

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Her har vi

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 2)\lambda + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Example

(Multiple egenverdier) Vi vil finne egenverdiene og egenvektorene til

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Her har vi

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 2)\lambda + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Dermed fins det bare en egenverdi. For å finne egenvektorer løser vi

$$2x - y = x, x = y.$$

Dermed er $(1, 1)$ en egenvektor, men alle andre er multipler av denne. Så det fins ingen basis bestående av egenvektorer.

Example

(Komplekse egenverdier) Vi vil finne egenverdiene og egenvektorene til

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

4.10 Egenvektorer og egenverdier

Example

(Komplekse egenverdier) Vi vil finne egenverdiene og egenvektorene til

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Her har vi

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 + 9 = \lambda^2 - 2\lambda + 10$$

Example

(Komplekse egenverdier) Vi vil finne egenverdiene og egenvektorene til

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Her har vi

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 + 9 = \lambda^2 - 2\lambda + 10$$

Vi har at $P_A(\lambda) = 0$ har løsninger

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm 6\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm 3\sqrt{-1}.$$

Her ser vi at det ikke fins *reelle* egenverdier i det hele tatt.

Example

(Komplekse egenverdier)

For å finne en egenvektor konsentrerer vi oss om $\lambda_1 = 1 + 3i$ løser vi

$$x - 3y = (1 + 3i)x, 3x + y = (1 + 3i)y$$

$$-3ix = 3y, 3x = 3yi$$

$$y = -ix.$$

Example

(Komplekse egenverdier)
For å finne en egenvektor konsentrerer vi oss om $\lambda_1 = 1 + 3i$ løser vi

$$x - 3y = (1 + 3i)x, 3x + y = (1 + 3i)y$$

$$-3ix = 3y, 3x = 3yi$$

$$y = -ix.$$

Så en løsning er $\mathbf{v}_1 = (1, -i)$.

Example

(Komplekse egenverdier)
For å finne en egenvektor konsentrerer vi oss om $\lambda_1 = 1 + 3i$ løser vi

$$x - 3y = (1 + 3i)x, 3x + y = (1 + 3i)y$$

$$-3ix = 3y, 3x = 3yi$$

$$y = -ix.$$

Så en løsning er $\mathbf{v}_1 = (1, -i)$.

Vi påstår nå at $\mathbf{v_2} = (1, i)$ også er en egenvektor. Dette er fordi at $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ er den andre egenverdien og $\mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}_1}$, og vi har at

$$A\mathbf{v}_2 = \overline{A}\overline{\mathbf{v_1}} = \overline{A\mathbf{v_1}} = \overline{\lambda_1\mathbf{v_1}} = \lambda_2\mathbf{v}_2.$$

Theorem

(4.10.6) La A være en symmetrisk $n \times n$-matrise. Da er alle egenverdiene til A reelle, og det fins en ortonormal basis $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ av egenvektorer for A.

4.10 Egenvektorer og egenverdier - diagonalisering av matriser

4.10 Egenvektorer og egenverdier - diagonalisering av matriser

Proposition

(4.10.8) La A være en $n \times n$-matrise med en basis $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ av egenvektorer for A. Sett $M = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$. Da har vi

$$M^{-1}AM = D,$$

der D er matrisen med egenverdiene λ_j langs diagonalen.

4.10 Egenvektorer og egenverdier - diagonalisering av matriser

Proposition

(4.10.8) La A være en $n \times n$-matrise med en basis $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ av egenvektorer for A. Sett $M = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$. Da har vi

$$M^{-1}AM = D,$$

der D er matrisen med egenverdiene λ_j langs diagonalen.

Vi sier at matrisen M er diagonaliserbar

4.10 Egenvektorer og egenverdier - diagonalisering av matriser

Proposition

(4.10.8) La A være en $n \times n$-matrise med en basis $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ av egenvektorer for A. Sett $M = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$. Da har vi

$$M^{-1}AM = D,$$

der D er matrisen med egenverdiene λ_j langs diagonalen.

Vi sier at matrisen M er diagonaliserbar

Merk: Enhver symmetrisk $n \times n$-matrise er diagonaliserbar.