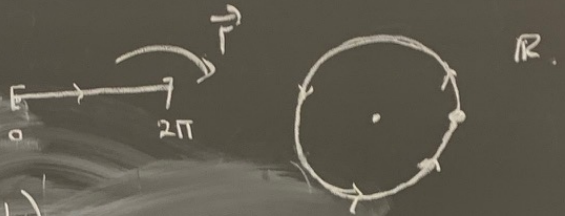
3 Parametriserte kurver

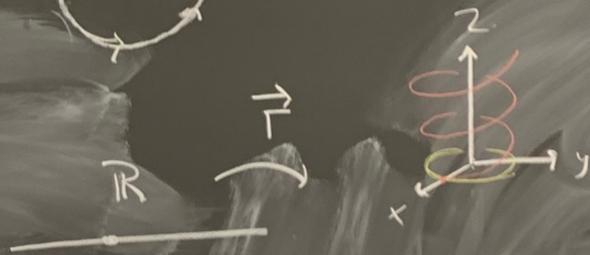
Eksempler: $\vec{r}: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

gitt ved $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$



$\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gitt ved

$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$



DEF (3.1.1). En parametrisert kurve i $\mathbb{R}^n$ er en kontinuerlig funksjon

$$\vec{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

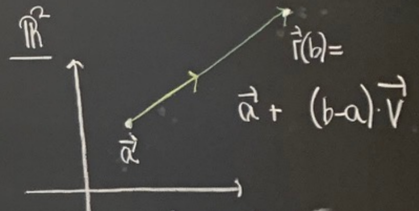
På komponent form

$$\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

Naturlig spørsmål: hva er lengden til en parametrisert kurve i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$?

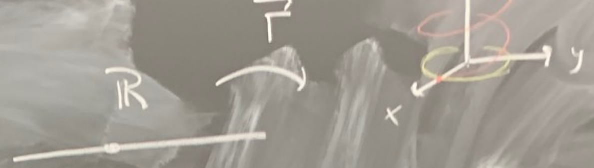
Eksempel: $\vec{r}(t) = \vec{a} + (t-a)\cdot\vec{v}$,

$\vec{a}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $t \in [a,b]$.



$$\text{lengden} = \| r(b) - r(a) \| = \| (b-a)\cdot\vec{v} \| = (b-a)\|\vec{v}\|.$$

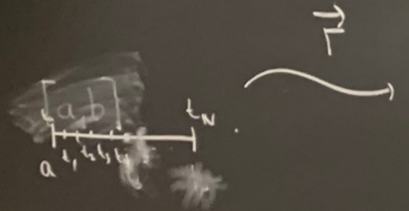
gitt ved $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t$

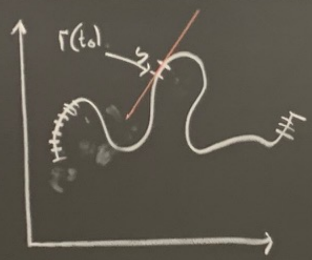


$\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

Anta nå at $\vec{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ er en kontinuerlig deriverbar kurve.





Hva "er" lengden til et lite stykke s på kurven?

Nær t_0: $$\vec{r}(t) = \underbrace{\vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)(t-t_0)}_{\text{lineariseringen.}} + \sigma(t)$$

For t nær t_0 er lengden til s ca.: $\|\vec{r}\,'(t_0)\|(t-t_0)$.

... kontinuerlig funksjon

$\vec{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

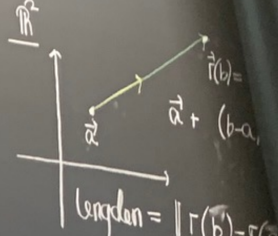
På komponent form

$\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$.

Naturlig spørsmål: hva er lengden til en parametrisert kurve i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$?

Eksempel: $\vec{r}(t) = \vec{a} + (t-a)\cdot\vec{v}$,

$\vec{a}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $t \in [a,b]$.



lengden $= \|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)\|$

$= \|(b-a)\cdot\vec{v}\|$

$= (b-a)\|\vec{v}\|$.

Stykk opp intervallet $[a,b]$:

$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$.

Lengden til kurven er summen av lengdene til kurvene $\vec{r}([t_{j-1}, t_j])$,

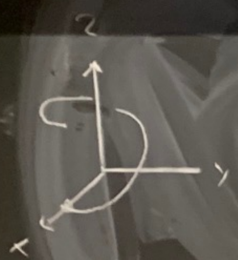
og det er omtrent

(*) $\|\vec{r}\,'(t_0)\|\cdot(t_1 - t_0) + \|\vec{r}\,'(t_1)\|\cdot(t_2 - t_1) + \dots + \|\vec{r}\,'(t_{N-1})\|(t_N - t_{N-1})$.

(*) er en Riemann sum

for integralet

$$\int_a^b \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt \quad \leftarrow \text{Definisjonen a buelengden, også i } \mathbb{R}^n.$$



EKSEMPEL:

$\vec{r}: [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gitt ved

$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$

Lengden:

$$\int_0^{2\pi} \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,dt = 2\sqrt{2}\cdot\pi.$$

$$\vec{r}\,'(t) = (-\sin(t), \cos t, 1)$$

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Hastighet og fart til en kurve.

La $\vec{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være

en deriverbar kurve.

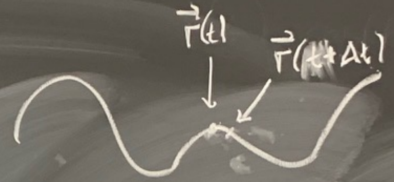
Hva burde farten til

kurven være i et punkt t?

Lengden på kurven mellom

$\vec{r}(t+\Delta t)$ og $\vec{r}(t)$ er omtrent

$$\| \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \|$$



Farten burde være

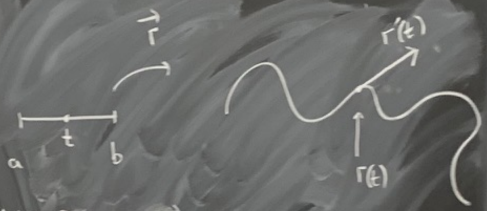
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\| \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \|}{|\Delta t|} = \| \vec{r}\,'(t) \|$$

DEF 3.1.3 Anta at $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ er en deriverbar kurve. Da kaller vi

$v(t) = \|\vec{r}\,'(t)\|$ farten i punktet t,

og så kaller vi $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$

hastigheten i punktet t.



EKSEMPEL $\vec{r}(t) = (t\cos t, t\sin t)$

$\vec{v}(t) = r'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t)$

$$v(t) = \sqrt{\cos^2 t \cancel{- 2t\cos t\sin t} + t^2\sin^2 t + \sin^2 t \cancel{+ 2t\sin t\cos t} + t^2\cos^2 t} = \sqrt{1+t^2}.$$

kurven være i et punkt t? $\| \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \|$

DEF 3.1.13 La $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ være en to ganger deriverbar kurve.

Vi definere akselerasjonen til $\vec{r}$ i et punkt t til å være

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t)$$

Vi definerer baneakselerasjonen til å være $a(t) = v'(t)$.

$v(t) = \|\vec{r}'(t)\|$ farten i punktet t,

og så kaller vi $\vec{V}(t) = \vec{r}'(t)$ hastigheten i punktet t.

EKSEMPEL

$$\vec{r}(t) = (t\cos t,\ t\sin t)$$

$$\vec{v}(t) = r'(t) = (\cos t - t\sin t,\ \sin t + t\cos t)$$

$$v(t) = \sqrt{\cos^2 t - \cancel{2t\cos t\sin t} + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + \cancel{2t\sin t\cos t} + t^2\cos^2 t} = \sqrt{1+t^2}$$

Eksempel: Se på $\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definert ved

$$\vec{r}(t) = (\cos(t),\ \sin(t)).$$

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (-\sin(t),\ \cos(t)).$$

$$v(t) = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1.$$

$$\vec{a}(t) = (-\cos(t), -\sin(t)) = -\vec{r}(t)$$

$$a(t) = 0.$$

Hva burde farten til kurven være i et punkt t?

$\|\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)\|$

$\Delta t \to 0$ $|\Delta t|$

Proposisjon 3.1.4. La $\vec{r}_i : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ være deriverbare kurver for $i=1,2$.

(i) $(\vec{r}_1+\vec{r}_2)'(t) = \vec{r}_1'(t)+\vec{r}_2'(t)$.

(ii) $(\vec{r}_1-\vec{r}_2)'(t) = \vec{r}_1'(t)-\vec{r}_2'(t)$.

(iii) $(\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2)'(t) = \vec{r}_1'(t)\cdot\vec{r}_2(t)+\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2'(t)$.

(iv) $(\vec{r}_1\times\vec{r}_2)'(t) = \vec{r}_1'(t)\times\vec{r}_2(t)+\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2'(t)$.

(v) $(h\cdot\vec{r}_1)'(t) = h'(t)\vec{r}_1(t) + h\cdot\vec{r}_1'(t)$.

... Da kalles vi

$V(t) = \|\vec{r}\,'(t)\|$ <u>farten</u> i punktet t,

og så kalles vi $\vec{V}(t) = \vec{r}\,'(t)$

<u>hastigheten</u> i punktet t.

EKSEMPEL $\vec{r}(t) = (t\cos t,\ t\sin t)$

$\vec{v}(t) = r'(t) = (\cos t - t\sin t,\ \sin t + t\cos t)$

$v(t) = \sqrt{\cos^2 t - \cancel{2t\cos t\sin t} + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + \cancel{2t\sin t\cos t} + t^2\cos^2 t} = \sqrt{1+t^2}$

<u>Korollar 3.1.5</u> Dersom $\|\vec{r}(t)\|$ er konstant, så har vi at $\vec{v}(t)$ står vinkelrett på $\vec{r}(t)$.

<u>Bevis</u>: $\underset{\overset{\|}{0}}{\frac{d}{dt}C} = \frac{d}{dt}(r(t)\cdot r(t)) = r'(t)\cdot r(t) + r(t)\cdot r'(t) = 2\cdot r'(t)\cdot r(t) = 2\,\vec{v}(t)\cdot\vec{r}(t)$ ∎