# FLERVARIABEL ANALYSE OG LINEÆR ALGEBRA

## 1. Kjeglesnitt

Dette er en kort omtale og beskrivelse av *ellipser, parabler* og *hyperbler*; geometriske figurer kalt *kjeglesnitt.* Målsettingen er å gi litt bakgrunn for å kunne jobbe med nivåkurver i kapittel 3.7 i "Flerbariabel analyse med lineær algebra". For en grundigere drøfting av kjeglesnitt, se kapittel 3.6 i samme bok.

1.1. **Ellipser.** Vi starter med å se på enhetssirkelen $S^1$ i $\mathbb{R}^2$, dette er mengden av alle punkter $(x, y)$ som tilfredsstiller likningen

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Dette er det enkleste eksempelet på det vi skal kalle en *ellipse.* Nokså upresist er en mer generell ellipse figuren vi får hvis vi strekker eller klemmer sirkelen i $x$-retningene og $y$-retningene (se Figur 1 under). Hvis vi for eksempel strekker i $x$-retningene med en faktor 2 og i $y$-retningene med en faktor 3, ender vi opp med en figur som er definert ved likningen

$$(\frac{x}{2})^2 + (\frac{y}{3})^2 = 1 \text{ (se Figur 1.)} \tag{1.1}$$

Setter vi $y = 0$ ser vi nettopp at $x = \pm 2$, og dersom $x = 0$ så har vi $y = \pm 3$.

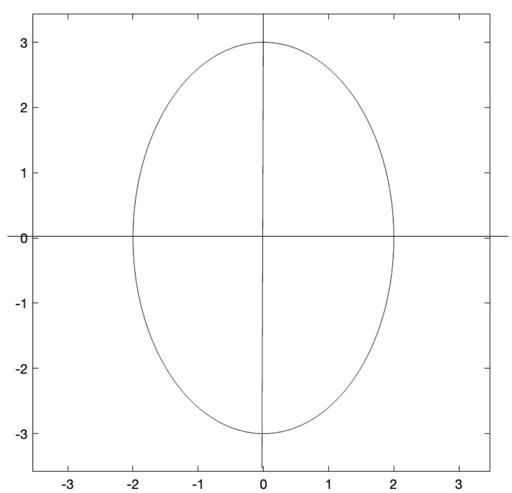


Figure 1. En ellipse.

For å begrunne at figuren er riktig, kan vi også skrive om (1.1) til

$$(\frac{1}{3})^2y^2 = 1 - (\frac{x}{2})^2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}y = \pm\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2} \Leftrightarrow y = \pm\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}.$$

Så vi ser at figuren består av to grafer over intervallet $[-2, 2]$ i $x$-aksen, en i det øvre og en i det nedre halvplan, som begge inneholder punktene $(\pm 2, 0)$, og de inneholder henholdsvis punktene $(0, \pm 3)$.

Mer generelt kan vi deformere enhetssirkelen ved å bruke generelle konstanter $a, b > 0$, og vi ender opp med figuren

$$(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1. \tag{1.2}$$

Sirkelen er da strukket ut med en faktor $a$ i $x$-retningene og en faktor $b$ i $y$-retningene. Hvis vi tegner resultatet i $(x, y)$-planet er dette da en oval figur tilsvarende Figur 1 over, men den treffer $x$-aksen i punktene $(\pm a, 0)$ og $y$-aksen i punktene $(0, \pm b)$. Merk da at dersom $a > b$ så vil figuren være bredere enn den er høy. Figuren kalles en ellipse med halvakser $a$ og $b$.

Til slutt tillater vi oss også å *sentrere* en ellipse i et generelt punt $(x_0, y_0)$ i planet, og vi definerer

**Definisjon 1.1.** En *ellipse* er en mengde av punkter $(x, y)$ i planet som tilfredsstiller

$$(\frac{(x-x_0)}{a})^2 + (\frac{(y-y_0)}{b})^2 = 1,$$

der $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ og $a, b > 0$. Vi sier at ellipsen har *halvakser* $a$ og $b$, og *senter* $(x_0, y_0)$.

**Eksempel 1.2.** Dersom $a = b = r$ og $(x_0, y_0) = (0, 0)$, har vi en sirkel med radius $r$ og med senter i origo, siden

$$(\frac{x}{r})^2 + (\frac{y}{r})^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2. \tag{1.3}$$

Dersom i stedet $(x_0, y_0) = (1, 2)$ har vi fremdeles en sirkel med radius $r$, men denne har nå senter i punktet $(1, 2)$.

**Eksempel 1.3.** For varierende verdier av $c > 0$ definerer likningene

$$(\frac{x-1}{c})^2 + (\frac{y}{c/\sqrt{2}})^2 = 1.$$

ellipser med senter i punktet $(1, 0)$ og med halvakser $c$ og $c/\sqrt{2}$. Halvaksene vokser altså når $c$ vokser, og vi kan se for oss at ellipsene "vokser" med $c$ (se Figur 2).

**Eksempel 1.4.** Se på funksjonen $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Beskriv nivåkurvene til $f$. Vi ønsker altså å beskrive mengdene

$$\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

der $c$ er reele tall $c \in \mathbb{R}$.

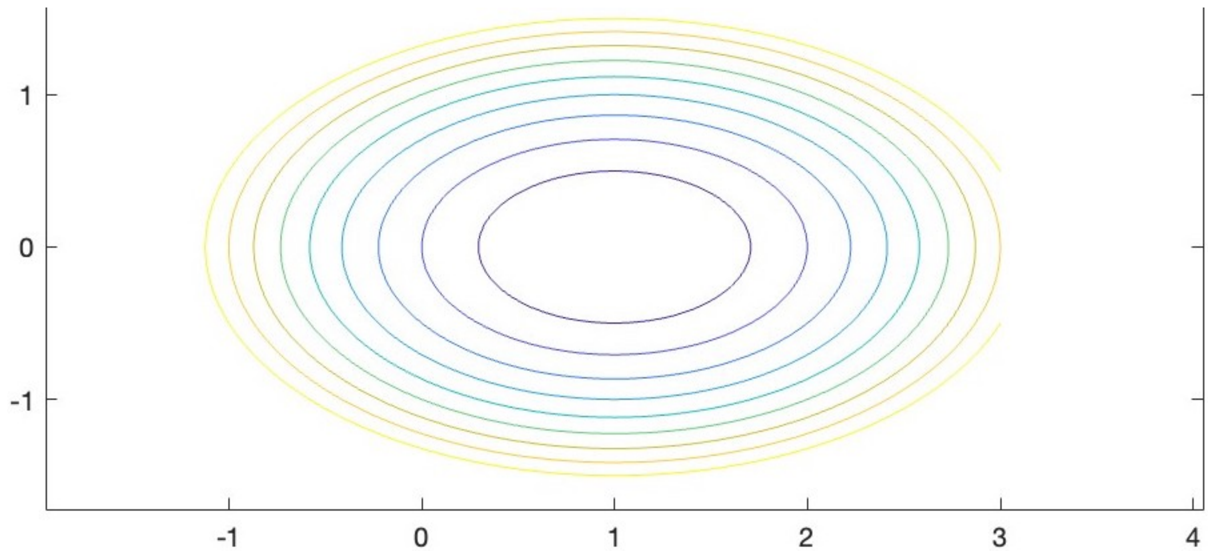


FIGURE 2. Ellipser sentrert i $(1, 0)$.

Dersom $c < 0$ er det umulig å tilfredstille likningen $f(x, y) = c$. Hvis $c = 0$ må vi ha at $(x, y) = (0, 0)$. Så vi konsentrerer oss om $c > 0$.

Vi har at

$$2x^2 + y^2 = c \Leftrightarrow (\frac{x}{\sqrt{(\frac{c}{2})}})^2 + (\frac{y}{\sqrt{c}})^2 = 1.$$

Så vi ser at $\Gamma_c$ er en ellipse med halvakser $\sqrt{(\frac{c}{2})}$ og $\sqrt{c}$, og nivåkurvene "vokser" med $c$ (se Figur 3 under).

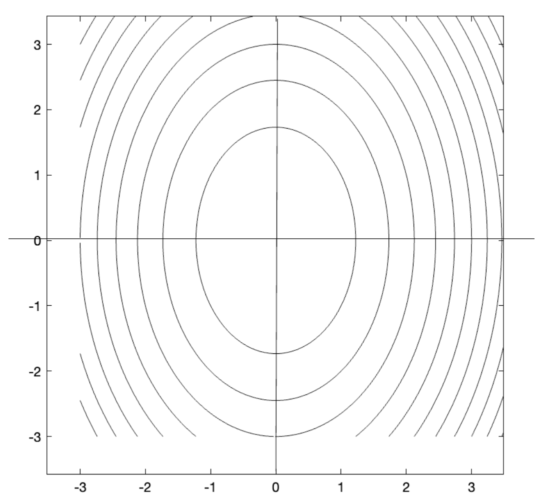


FIGURE 3. Noen nivåkurver fra Eksempel 1.4

1.2. **Parabler.** Vi starter med å se på et eksempel på hva vi kaller en *parabel.* Eksempelet er mengden av punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ som tilfredsstiller likningen

$$y^2 = x. \tag{1.4}$$

Denne figuren er det enklere å se for seg ut fra definisjonen enn ellipsene; den er en graf over $y$-aksen. Tilsvarende det vi gjorde for ellipser kan vi skalere $x$-koordinaten med en faktor $c > 0$ og $y$-koordinaten med en faktor $d > 0$, og vi ender opp med en figur som er definert ved likningen

$$(\frac{y}{d})^2 = x/c. \tag{1.5}$$

Hvis vi i tillegg tillater oss å speile i $y$-aksen, tillater vi også at $c < 0$.

Likningen (1.5) er unødvendig komplisert ettersom den er ekvivalent med

$$y^2 = (\frac{d^2}{c})x,$$

der $\frac{d^2}{c}$ er en konstant. Så vi definerer først en parabel til å være en mengde av punkter som tilfredsstiller

$$y^2 = bx,$$

der $b \neq 0$. En parabel er nokså enkel å skissere og se for seg, da den er en enkel graf over $y$-aksen.

Til slutt tillater vi oss både å bytte om rollene til $x$ og $y$, og å *sentrere* en parabel i et punkt $(x_0, y_0)$,og vi definerer

**Definisjon 1.5.** En *parabel* er en mengde punkter i $\mathbb{R}^2$ som tilfredsstiller enten

$$(y - y_0)^2 = b(x - x_0)$$

eller

$$(x - x_0)^2 = b(y - y_0),$$

der $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ og $b \neq 0$.

1.3. **Hyperbler.** Vi starter med å se på et eksempel på hva vi kaller en *hyperbel.* Eksempelet er mengden av punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ som tilfredsstiller likningen

$$x^2 - y^2 = 1. \tag{1.6}$$

Mengden av slike punkter kan vi nå skrive som unionen av to grafer, denne gangen over $y$-aksen

$$x = \pm\sqrt{1 + y^2}.$$

(Se Figur 4.)

Vi ser at figuren er symmetrisk om $y$-aksen, at begge grafene er symmetriske om $x$-aksen, og at de treffer $x$-aksen i punktene $(\pm 1, 0)$. Tilsvarende det vi gjorde for ellipser kan vi skalere $x$-koordinaten med en faktor $a > 0$

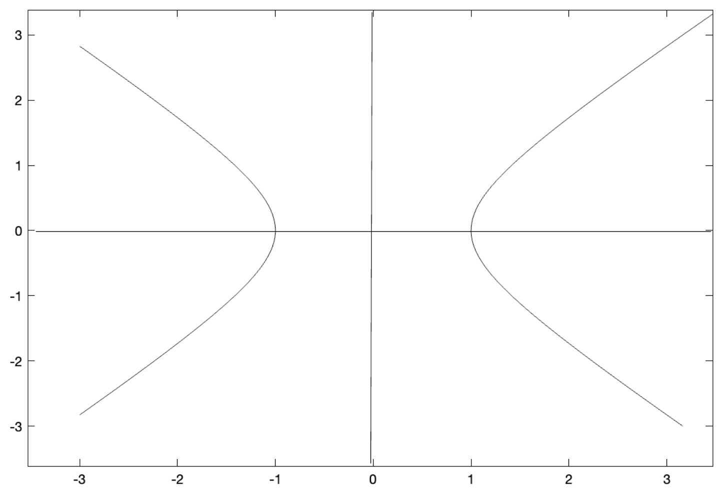


FIGURE 4. En hyperbel

og $y$-koordinaten med en faktor $b > 0$, og vi ender opp med en figur som er definert ved likningen

$$(\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2 = 1. \tag{1.7}$$

Dersom vi tegner opp figuren ser vi at den er nokså lik figuren i eksempelet over. Den er fortsatt symmetrisk om $x$- og $y$-aksen, men de to komponentene treffer nå $x$-aksene i $(\pm a, 0)$, og de kommer til å "krumme seg" mer eller mindre, avhengig av konstantene $a$ og $b$.

Også nå tillater vi oss å bytte om på rollene til $x$ og $y$, og å translatere hyperbler i planet, og vi definerer

**Definisjon 1.6.** En *hyperbel* er en mengde punkter $(x, y)$ i planet som tilfredsstiller en av likningene

$$(\frac{(x - x_0)}{a})^2 - (\frac{(y - y_0)}{b})^2 = 1$$

eller

$$(\frac{(y - y_0)}{b})^2 - (\frac{(x - x_0)}{a})^2 = 1,$$

for $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ og $a, b > 0$.

**Eksempel 1.7.** Beskriv nivåkurvene til funksjonen

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Vi er altså ute etter å beskrive mengdene

$$\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\},$$

for ulike verdier av $c \in \mathbb{R}$.

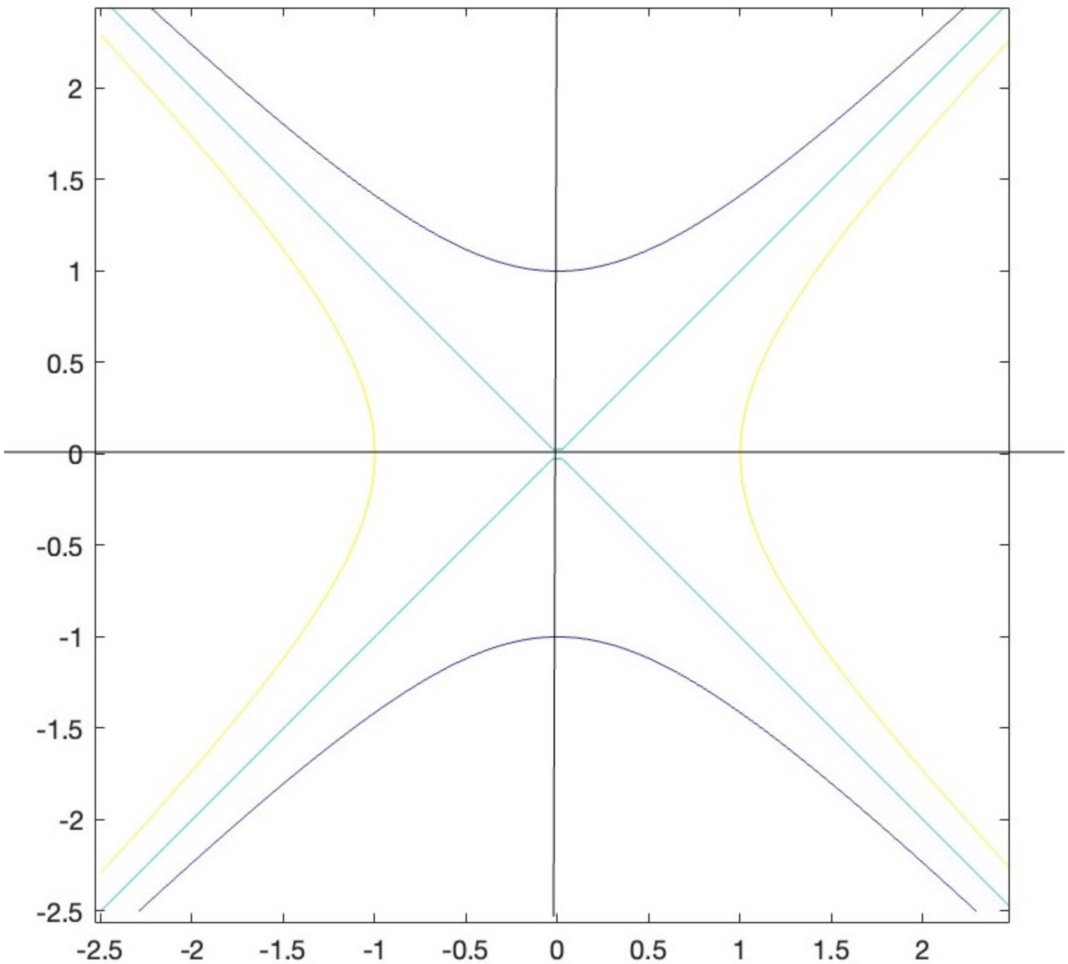


FIGURE 5. Noen nivåkurver

Hvis for eksempel $c = 1$ er jo dette hyperbelen i Figur 4 over, og denne har vi tegnet inn i gult i Figur 5. Hvis vi kikker på $c = -1$ har vi likningen

$$x^2 - y^2 = -1 \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 1,$$

så dette er hyperbelen i Figur 4 over, bare at rollene til $x$ og $y$ er byttet om på; denne har vi tegnet i lilla i Figur 5.

Hvis vi videre velger oss en annen positiv $c$, for eksempel $c = 4$, er nivåkurven definert ved

$$x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow (\frac{x}{2})^2 - (\frac{y}{2})^2 = 1$$

og vi ser igjen at vi har å gjøre med en hyperbel, og denne er av "typen" til $\Gamma_1$, bare at den skjærer $x$-aksen i punktene $(\pm 2, 0)$. Setter vi $c = -4$ får vi en hyperbel av "typen" til $\Gamma_{-1}$, bare at den skjærer $y$-aksen i punktene

$(0, \pm 2)$. Sjekk videre at for $c > 0$ har vi hyperbler av "typen" til $\Gamma_1$, og for $c < 0$ har vi hyperbler av "typen" til $\Gamma_{-1}$ (se Figur 6 under).

Til slutt kikker vi på tilfellet $c = 0$. Da er likningen

$$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2.$$

Dette beskriver de to grafene $y = \pm x$ som er tegnet inn i turkis i Figur 5. Denne nivåkurven er altså eksepsjonell, da den ikke er noen hyperbel (eller noe annet kjeglesnitt for den saks skyld).

I Figur 6 og Figur 7 under har vi inkludert flere nivåkurver, og i tillegg grafen til $f$ i $\mathbb{R}^3$.

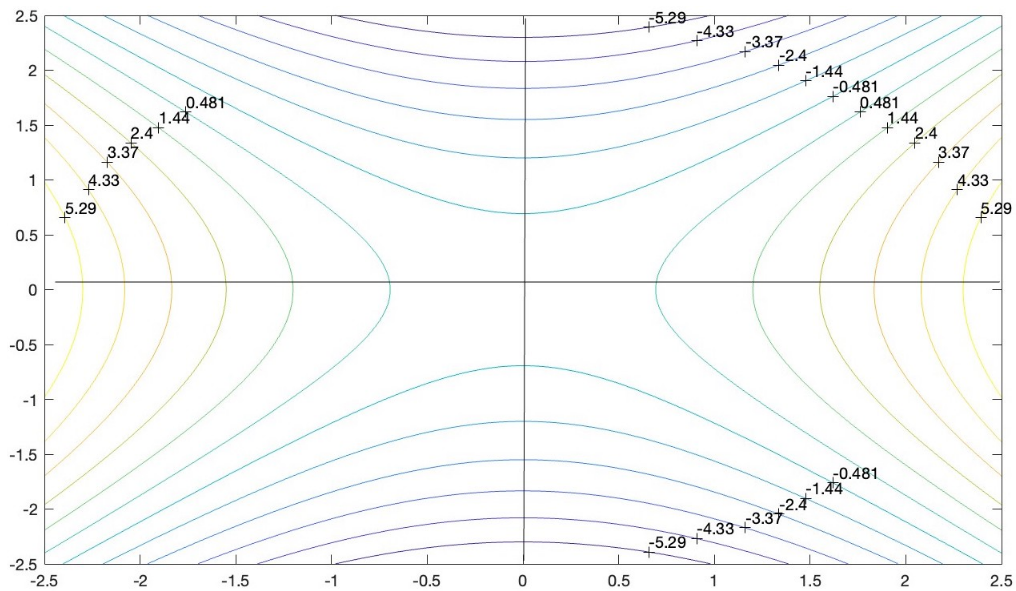


Figure 6. Noen flere nivåkurver

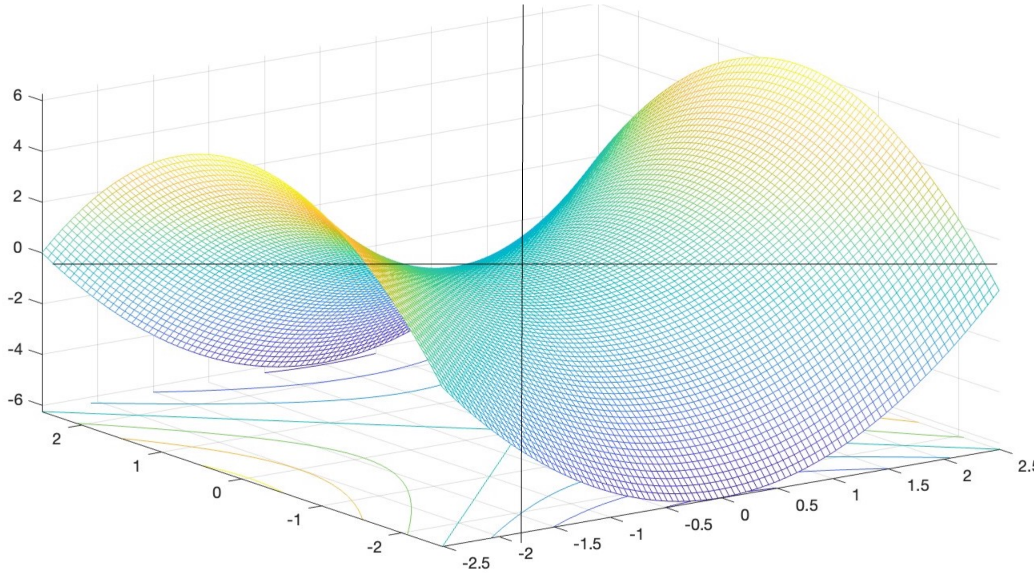


FIGURE 7. Nivåkurver med grafen