UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra - løsningsforslag
Eksamensdag:	Torsdag 17. august 2023
Tid for eksamen:	15.00 – 19.00
Løsningsforslaget er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Gjennom hele besvarelsen må alle svar begrunnes på en klar og tydelig måte dersom de skal gi uttelling.

Oppgave 1 (vekt 20%)

La

$$f(x,y) = 4x^2y + xy - x^2 + 1$$

a) Finn alle stasjonære punkter for f.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er maksimumspunkter, minimumspunkter eller sadelpunkter.

Løsning:

a) Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8xy + y - 2x, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x^2 + x = x(4x+1)$$

For at $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ må vi dermed ha at $x = 0$ eller $x = -1/4$. For $x = 0$ må vi ha at $y = 0$. Dersom $x = -1/4$ må vi ha

$$-2y + y + 1/2 = 0 \Leftrightarrow y = 1/2.$$

De stasjonære punktene er altså $(0,0)$ og $(-1/4, 1/2)$.

b) Vi har at Hessematrisen til f er

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8y-2 & 8x+1 \\ 8x+1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi har at

$$|H_f(0,0)| = |H_f(-1/4, 1/2)| = -1$$

så begge stasjonære punkter er sadelpunkter.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 (vekt 10%)

La $L \subset \mathbb{R}^2$ være linja definert ved

$$L = \{(x, y) : x + 2y = 1\}$$

Bruk Lagranges multiplikatormetode for å finne punktet på L som er nærmest origo.

Løsning: Vi ønsker å minimere funksjonen $f(x, y) = x^2 + y^2$ under bibetingelsen $g(x, y) = x + 2y - 1 = 0$. Vi har

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y), \nabla g(x, y) = (1, 2)$$

så Lagrangeligningene blir

- $2x = \lambda$
- $2y = 2\lambda$
- $x + 2y - 1 = 0$

Vi har

$$\lambda/2 + 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2/5$$

så eneste kandidat for nærmeste punkt er $(1/5, 2/5)$. Siden det må være et nærmeste punkt, må det være dette punktet.

Oppgave 3 (vekt 20%)

La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3.5 & -1.5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

b) Finn alle vektorer $\mathbf{v}$ slik at

$$\lim_{n \to \infty} A^n \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Løsning:
a) Det karakteristiske polynomet er

$$(\lambda - 3.5)(\lambda + 1) - (-1.5)3 = \lambda^2 - 2.5\lambda + 1$$

Så egenverdiene er $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 1/2$. For å finne egenvektoren tilsvarende λ_1 løser vi

$$(3.5x - 1.5y, 3x - y) = (2x, 2y)$$

som gir ligningssettet

- $3.5x - 1.5y = 2x$
- $3x - y = 2y$

(Fortsettes på side 3.)

og vi ser at vi må ha $x = y$. Så for eksempel kan vi sette $\mathbf{v}_1 = (1,1)$ med tilhørende egenverdi 2. En tilsvarende utregning gir en egenvektor $\mathbf{v}_2 = (1,2)$ med tilhørende egenverdi 1/2.

b) Egenvektorene er lineært uavhengige, så enhver vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ kan skrives som

$$\mathbf{x} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2, a, b \in \mathbb{R}$$

Da har vi at

$$A^n\mathbf{x} = a2^n\mathbf{v}_1 + b(1/2)^n\mathbf{v}_2$$

Vi har at

$$\|A^n\mathbf{x}\| = \|a2^n\mathbf{v}_1 + b(1/2)^n\mathbf{v}_2\| \geq \|a2^n\mathbf{v}_1\| - \|b(1/2)^n\mathbf{v}_2\| \geq |a| - (1/2)^n b\|\mathbf{v}_2\|$$

og dette går ikke mot null med mindre $a = 0$. På den annen side ser vi at $b(1/2)^n\mathbf{v}_2 \to \mathbf{0}$ når $n \to \infty$ så svaret er alle vektorer $\mathbf{x} = b\mathbf{v}_2$.

Oppgave 4 (vekt 20%)

a) Finn konvergensområdet for rekka

$$s(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!}$$

b) Finn summen til rekka fra oppgave **a**).

Løsning:
a) Vi har at

$$\sum_{n=1}^{m}|(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!}| \leq |x|\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(|x|^2)^n}{n!} \leq |x|e^{|x|^2}$$

så rekka er absolutt konvergenet og dermed konvergent for alle x.

b) Integrerer vi rekka ledd for ledd og slenger på en konstant 1 får vi rekken

$$a(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n}\frac{x^{2n}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!} = e^{-x^2}$$

med $a'(x) = s(x)$. Vi har at

$$s(x) = a'(x) = -2xe^{-x^2}$$

Oppgave 5 (vekt 20%)

La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

(Fortsettes på side 4.)

a) Finn den reduserte trappeformen til A.

b) Finn alle vektorer $\mathbf{b}$ slik at matriseligningen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

har en løsning. Er disse løsningene entydige?

Løsning:
a) Den reduserte trappeformen er identitetsmatrisen I_3.

b) Siden den reduserte trappeformen er identitetsmatrisen I_3 vet vi at ligningen har en (entydig) løsning for alle $\mathbf{b}$.

Oppgave 6 (vekt 10%)

La $\mathcal{C}$ være kurven parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (\cos^2(t)\sin(t), \sin(t/2)\cos^2(t)), t \in [0, \pi]$$

Finn et vektorfelt $\mathbf{F}$ slik at

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 123.$$

Løsning: Vi har at $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$ og $\mathbf{r}(\pi) = (0, 1)$. Dersom $\phi(x, y)$ er en potensialfunksjon for et vektorfelt $\mathbf{F}$ vet vi at

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi((0, 1)) - \phi((0, 0))$$

og vi kan for eksempel sette $\phi(x, y) = 123y$. Vi har da at $\mathbf{F}(x, y) = (0, 123)$.

SLUTT