UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	Fredag 2. juni 2023
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00

Oppgavesettet er på 5 sider.

Vedlegg:	Formelsamling
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Gjennom hele besvarelsen må alle svar begrunnes på en klar og tydelig måte dersom de skal gi uttelling.

Oppgave 1 (vekt 20%)

La

$$f(x,y) = 3y^2 - 3x^2 + 8xy - 6y - 8x$$

a) Finn de stasjonære punktene til f.

Løsning: Vi har at

$$\nabla f(x,y) = (-6x + 8y - 8, 6y + 8x - 6)$$

Vi får

$$y = (3/4)x + 1$$

og videre

$$6((3/4)x + 1) - 6 = (9/2)x = 0$$

Så $x = 0$ og vi får $y = 1$.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er maskimumspunkter, minimumspunkter eller sadelpunkter.

Løsning: Hessematrisen til f er

$$Hf = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Vi ser at determinanten er strengt negativ, så det stasjonære punktet $(0,1)$ er et sadelpunkt.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 (vekt 10%)

La $f(x,y) = xy^2$. Bruk Lagranges multiplikatormetode til å finne maksimumspunkter og minimumspunkter for f på sirkelen

$$S = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

Løsning:. Vi har

$$\nabla f(x,y) = (y^2, 2xy)$$

og

$$\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$$

Vi må løse

- $y^2 = \lambda 2x$
- $2xy = \lambda 2y$
- $x^2 + y^2 = 1$

Tilfelle 1 For $y = 0$ har vi punkter $(-1,0), (1,0)$ med $\lambda = 0$.

Tilfelle 2 For $y \neq 0$ har vi $\lambda = x$ fra andre ligning. Fra første og tredje ligning får vi da

$$3x^2 = 1$$

som gir $x = \pm\sqrt{1/3}$ og $y = \pm\sqrt{2/3}$. Vi har at

- $f(-1,0) = 0$
- $f(1,0) = 0$
- $f(-\sqrt{1/3}, \pm\sqrt{2/3}) = -\sqrt{1/3}(2/3)$
- $f(\sqrt{1/3}, \pm\sqrt{2/3}) = \sqrt{1/3}(2/3)$

Så vi ser at $(-\sqrt{1/3}, \pm\sqrt{2/3})$ er minimumspunkter og $(\sqrt{1/3}, \pm\sqrt{2/3})$ er maksimumspunkter.

Oppgave 3 (vekt 20%)

La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ -0.3 & 1.1 \end{pmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

Løsning: Vi ser først på $B = 10 \cdot A$. Det karakteristiske polynomet til B er

$$(\lambda - 4)(\lambda - 11) + 6 = \lambda^2 - 15\lambda + 50$$

som har røtter $\lambda = 10$ og $\lambda = 5$.

Egenverdi for B for $\lambda = 10$: Vi må løse

(Fortsettes på side 3.)

- $4x + 2y = 10x$
- $-3x + 11y = 10y$

Første ligning gir $y = 3x$ så vi kan sette $x = 1$ og vi får en egenvektor $\mathbf{v}_1 = (1, 3)$.

Egenverdi for B for $\lambda = 5$: Vi må løse

- $4x + 2y = 5x$
- $-3x + 11y = 5y$

Første ligning gir $y = x/2$ så vi kan sette $x = 2$ som gir en egenvektor $\mathbf{v}_2 = (2, 1)$.

Egenvektorene for A er de samme som for B, mens egenverdiene må skaleres med $1/10$ så de er henholdsvis 1 og $1/2$.

b) La $\mathbf{v} = (-5, 0)$. Finn

$$\lim_{n\to\infty} A^n\mathbf{v}$$

Løsning: Vi har at

$$(-5, 0) = (1, 3) - 3 \cdot (2, 1) = \mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v_2}$$

Vi får at

$$A^n\mathbf{v} = A^n(\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v_2}) = 1^n\mathbf{v}_1 + (1/2)^n\mathbf{v}_2 \underset{n\to\infty}{\to} \mathbf{v}_1$$

Oppgave 4 (vekt 20%)

a) Finn konvergensområdet for rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n}$$

Løsning: Vi har at

$$\left(\frac{|x|^{n+3}}{n+1}\right)/\left(\frac{|x|^{n+2}}{n}\right) = \frac{n|x|^{n+3}}{(n+1)|x|^{n+2}} = \frac{n|x|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} |x|$$

Forholdstesten forteller oss at rekka konvergerer for $|x| < 1$ og divergerer for $|x| > 1$. For $x = 1$ er rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ som vi vet at divergerer. For $x = -1$ er rekka en alternerende rekke med ledd som avtar mot null i absoluttverdi - da har vi konvergens. Konvergensområdet er $[-1, 1)$.

b) Finn summen til rekka fra oppgave **a**).

Løsning: Vi skriver

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x^2 g(x).$$

(Fortsettes på side 4.)

Vi har at

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

og dermed har vi

$$g(x) = -\log(1-x) + C$$

og siden $g(0) = 0$ har vi $C = 0$. Dermed har vi at

$$s(x) = -x^2 \log(1-x)$$

Oppgave 5 (vekt 20%)

La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Finn den reduserte trappeformen til A.

Løsning: Vi har

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \overset{II-2I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \overset{III-3I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \overset{III-II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-(1/3)II}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{I-2II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B$$

b) Finn alle vektorer $\mathbf{b}$ slik at matriseligningen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

ikke har noen løsninger.

Løsning: Vi har at ligningssystemet $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ikke har noen løsninger hvis og bare hvis $\mathbf{c} = (a, b, t)$ med $t \neq 0$. Så vi danner matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

og reverserer radoperasjonen utført over.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix} \overset{I+2II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a+2b \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix} \overset{-3II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a+2b \\ 0 & -3 & -3 & -3b \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix} \overset{III+II}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a+2b \\ 0 & -3 & -3 & -3b \\ 0 & -3 & -3 & t-3b \end{pmatrix} \overset{III+3I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a+2b \\ 0 & -3 & -3 & -3b \\ 3 & 3 & 6 & t+3a+3b \end{pmatrix} \overset{II+2I}{\sim}$$

(Fortsettes på side 5.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a+2b \\ 2 & 1 & 3 & 2a+b \\ 3 & 3 & 6 & t+3a+3b \end{pmatrix}$$

Så likningen har ingen løsninger hvis og bare hvis

$$\mathbf{b} = (a+2b, 2a+b, t+3a+3)$$

Oppgave 6 (vekt 10%)

La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y) = (y\cos(xy) - 2xye^{x^2y} - y, x\cos(xy) - x^2e^{x^2y} + x)$$

og la $\mathcal{C}$ være kurven parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$$

Finn

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Løsning: Vi ser at

$$\mathbf{F}(x,y) = (y\cos(xy) - 2xye^{x^2y}, x\cos(xy) - x^2e^{x^2y}) + (-y, x) = \mathbf{F}_1(x,y) + \mathbf{F}_2(x,y)$$

der $\mathbf{F}_1(x,y)$ er konservativt. Da har vi at

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}$$

siden $\mathcal{C}$ er en lukket kurve. Vi har at

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} = \int_0^{2\pi} (-\sin(t), \cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt = \int_0^{2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t) dt = 2\pi$$

SLUTT