UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1110 — Prøveeksamen
Eksamensdag:	Fredag 26. mai 2023

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg:

Tillatte hjelpemidler:

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

a) La S være sirkelen

$$S = \{(x, y) : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1\}$$

Bruk Lagranges multiplikatormetode for å finne punktene på S som er henholdsvis nærmest og lengst unna origo.

Løsning: Vi må sjekke funksjonen $f(x, y) = x^2 + y^2$ under bibetingelsen $g(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$. Vi har

$$\nabla f(x, y) = 2(x, y), \nabla g(x, y) = 2(x-1, y-2)$$

og vi får ligningene

$$x = \lambda(x-1), y = \lambda(y-2), (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

Vi ser at $y \neq 0$ på S og vi må også at $y - 2 \neq 0$ for at ligningene skal være oppfylt, ellers måtte vi ha $y = 0$. Om ligningene skal være oppfylt får vi da

$$\frac{x}{y} = \frac{\lambda(x-1)}{\lambda(y-2)} = \frac{x-1}{y-2} \Rightarrow y = 2x$$

Videre får vi da at

$$(x-1)^2 + (2x-2)^2 = (x-1)^2 + 4(x-1)^2 = 1$$

så $(x-1)^2 = 1/5$, som gir $x = 1 \pm 1/\sqrt{5}$. Dette gir oss kandidatene

$$\mathbf{x}_1 = (1 - 1/\sqrt{5}, 2 - 2/\sqrt{5}) \text{ og } \mathbf{x}_2 = (1 + 1/\sqrt{5}, 2 + 2/\sqrt{5})$$

Siden f må ha både en største og minste verdi på S må et av disse være maks og det andre min. Vi ser at $f(\mathbf{x}_2) > f(\mathbf{x}_1)$, så da er $\mathbf{x}_2$ maks og $\mathbf{x}_1$ min.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

a) Finn konvergensområdet til rekka $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$.

b) Finn summen $s(x)$ til rekka i **a)**.

Løsning:

a) Vi bruker forholdstesten

$$\frac{(n+1)|x|^{2n+1}}{n|x|^{2n-1}} = \frac{n+1}{n}|x|^2 \underset{n\to\infty}{\rightarrow} |x|^2$$

som viser at rekka konvergerer for $|x| < 1$ og divergerer for $|x| > 1$. For $|x| = 1$ har vi at $|nx^{2n-1}| = n$ så rekka divergerer. Konvergensområdet er $(-1, 1)$.

b) Vi skriver $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1} = (1/2)\sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n-1} = (1/2)g(x)$ der $g(x) = h'(x)$ med

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n - 1 = \frac{1}{1-x^2} - 1 = \frac{x^2}{1-x^2}$$

Da har vi

$$h'(x) = \frac{2x(1-x^2) + x^2 2x}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

Så

$$s(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2}$$

Oppgave 3

La

$$f(x,y) = 2x^2 - 5xy + 2y^2 - x + y$$

a) Finn de stasjonære punktene til f.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er lokale minimum, maksimum eller sadelpunkt.

Løsning:

a) Vi har at

$$\nabla f(x,y) = (4x - 5y - 1, -5x + 4y + 1)$$

Hvis $4x - 5y - 1 = 0$ har vi at $y = (4/5)x - 1/5$ og vi får

$$-5x + 4((4/5)x - 1/5) + 1 = 0$$

som gir

$$(5 - (16/5))x = 1/5 \Leftrightarrow 9x = 1.$$

Så $x = 1/9$ og $y = (4/5)(1/9) - 1/5 = (4/45) - 9/(45) = -5/(45) = -1/9$.

b)

Videre har vi at

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

og siden $\det Hf(x,y) = -9$ har vi at $(1/9, -1/9)$ er et sadelpunkt.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4

La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen A.

b) Finn matrisen

$$\lim_{n\to\infty} A^n$$

Løsning:
a) Det karakteristiske polynomet er

$$(\lambda - 3/4)^2 - 1/16$$

så vi ser at vi har egenverdier $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 1/2$. Vi finner en egenvektor ved å løse $3/4x + 1/4y = x$ som gir $3x + y = 4x$ og $y = x$ og en egenvektor $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$. Den andre egenvektoren finner vi ved å løse $3/4x + 1/4y = x/2$ som gir $3x + y = 2x$ og da $y = -1$ og en egenvektor $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$.

b) For en vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ har vi

$$\mathbf{x} = (x_1/2)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + (x_2/2)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{x_1 - x_2}{2}\mathbf{v}_2$$

Da får vi

$$A^n\mathbf{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}\mathbf{v}_1 + (\frac{1}{2})^n \frac{x_1 - x_2}{2}\mathbf{v}_2 \underset{n\to\infty}{\to} \frac{x_1 + x_2}{2}\mathbf{v}_1$$

så

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 5

La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Gi en begrunnelse for at det fins $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ sånn at matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke har noen løsning.

b) Beskriv mengden av alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ slik at matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alltid har en løsning.

Løsning:
a) Den reduserte trappeformen til A er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Fortsettes på side 4.)

Av dette ser vi at søylene i A ikke er en basis for $\mathbb{R}^3$ da den tredje er en lineær kombinasjon av de to første.

b) Kall søylene i A for $\mathbf{v}_j, j = 1, 2, 3$. Å kunne løse $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er det samme som å kunne løse

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$$

Fra **a)** har vi at $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ så da har vi at

$$(x_1 + 2x_3)\mathbf{v}_1 + (x_2 + x_3)\mathbf{v}_2 = \mathbf{b}$$

Så mengden av slike **b**er er det vi har kalt *spennet* til $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$.

Oppgave 6

a) Vi ser på vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = (2x3y^3 + 5\sin(e^x)e^x - 21x, 9x^2y^2 - y^3)$$

La $\mathcal{C}$ være kurven parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [0, \pi]$. Finn

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Løsning: Vi skriver $\mathbf{F} = (f_1, f_2)$. Vi har at

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 18xy^2, \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = 18xy^2$$

så vi ser at $\mathbf{F}$ er konservativt. For å bestemme integralet finner vi et potensiale for $\mathbf{F}$.

Et potensiale $\phi(x, y)$ må tilfredsstille

- $\phi(x, y) = x^2 3y^3 - 5\cos(e^x) - 21/2x^2 + f(y)$
- $\phi(x, y) = 3x^2y^3 - 1/4y^4 + g(x)$

Vi ser at et potensiale er

$$\phi(x, y) = 3x^2y^3 - 5\cos(e^x) - 21/2x^2 - 1/4y^4$$

Da har vi

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}(\pi)) - \phi(\mathbf{r}(0)) = -5\cos(e^{-1}) - 21/2 - (-5\cos(e) - 21/2)$$

$$= 5\cos(e) - 5\cos(e^{-1})$$

SLUTT