Eksamen MAT 1110, 4. juni 2021

Oppgave 1 (16 poeng)

a) En alternerende rekke $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ der $a_n \geq 0$ for alle $n \geq 0$ konvergerer dersom to krav til leddene a_n er oppfylt. Hvilke to krav dreier det seg om? (2 poeng)

b) Forklar hva vi mener med at en rekke er betinget konvergent og gi et eksempel på en betinget konvergent rekke som ikke konvergerer absolutt. (3 poeng)

c) Hva er konvergensradien til rekka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ der $a_1 = x$ og $a_{n+1} = -\frac{n+1}{n}\frac{x}{k}a_n$ fro $n \geq 1$ (5 poeng)?

d) Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{nx^n}{2^{n-1}} = -\frac{4x}{(2+x)^2}$$

i rekkas konvergensområde. (6 poeng)

Oppgave 2 (14 poeng)

a) La A være et lukket og begrenset område i $\mathbb{R}^2$, og la $f : A \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon på A, som er deriverbar på det indre av A. I følge ekstremalverdisetningen vil funksjonen ha et maksimumspunkt og et minimumspunkt i A. Forklar hvordan vi går fram for å finne disse ekstremalpunktene. (4 poeng)

b) Vi har gitt en funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ med at stasjonært punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$. For å avgjøre hva slags punkt det stasjonære punktet er, regner vi ut Hesse-matrisen $\mathrm{H}f(\mathbf{a})$ i det stasjonære punktet. Vi finner at det karakteristiske polynomet til Hesse-matrisen er gitt ved $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$. Hva slags stasjonært punkt er $\mathbf{a}$? Begrunn svaret. (5 poeng)

c) Et plan P i $\mathbb{R}^3$ er gitt ved $ax + by + cz = d$ hvor $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Bruk Lagranges multiplikatormetode til å finne den minste avstanden fra origo til planet P ved å finne minimum for funksjonen $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ over P. (5 poeng)

Oppgave 3 (18 poeng)

La A være en 2×2-matrise gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

der a, b og d er reelle tall.

a) Finn egenverdiene til A uttrykt ved a, b og d, og forklar hvorfor egenverdiene må være relle. (6 poeng)

b) La

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Regn ut egenverdiene til $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ og finn en basis av egenvektorer. (3 poeng)

c) Forklar hva vi mener med at en funksjon er en kontraksjon og vis at funksjonen $\mathbf{F}$ i oppgave b) er en kontraksjon på $\mathbb{R}^2$. (5 poeng)

d) Siden $\mathbf{F}$ er en kontraksjon på $\mathbb{R}^2$ vet vi at følgen

$$\mathbf{z}_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{F}(x_n, y_n) = \mathbf{F}(\mathbf{z}_n)$$

konvergerer uavhengig av startpunkt $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$. Finn grenseverdien

$$\mathbf{z} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{z}_n$$

(4 poeng)

Oppgave 4 (10 poeng)

La

$$\mathbf{F}(x,y) = (2xy + y^3 + g(x), x + x^2 + 3xy^2 + h(y))$$

være et vektorfelt på $\mathbb{R}^2$, der $g(x)$ er en vilkårlig deriverbar funksjon i x og $h(y)$ en vilkårlig deriverbar funksjon i y. La $\mathcal{C}$ være den plane kurven gitt i polarkoordinater ved $r(\theta) = 2\pi\theta - \theta^2$ hvor $0 \le \theta \le 2\pi$. Vi har $r(\theta) \ge 0$ for alle $\theta \in [0, 2\pi]$ og $r(0) = r(2\pi)$.

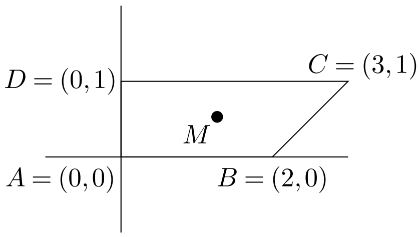
a) Vis at linjeintegralet av $\mathbf{F}$ langs med kurven $\mathcal{C}$ orientert mot venstre er

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \tfrac{8}{15}\pi^5$$

(6 poeng)

b) Et vektorfelt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt som gradienten til en funksjon f, dvs. $\mathbf{F} = \nabla f$. Forklar hvordan vi kan bruke Greens teorem til å vise at integralet av $\mathbf{F}$ langs en lukket kurve som ikke skjærer seg selv er 0.(4 poeng)

Oppgave 5 (12 poeng)



a) Et trapes $ABCD$ med hjørner $A=(0,0)$, $B=(2,0)$, $C=(3,1)$ og $D=(0,1)$ er gitt (se figur). Vis at massemiddelpunktet M til trapeset har koordinater $(\frac{19}{15}, \frac{8}{15})$. (6 poeng)

b) Over trapeset i oppgave a) setter vi opp et tak, dvs. en flate gitt ved funksjonen $f(x,y)=1+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y$. Finn arealet av denne flaten over trapeset. (6 poeng)