UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	Onsdag 1. Juni 2022
Tid for eksamen:	9:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (1a, 1b, 2a, 2b, 2c, osv.) teller 10 poeng. Du må enten begrunne svarene eller vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1. La A være 2×2-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{pmatrix}$$

a) Finn egenverdiene til A og tilhørende egenvektorer.

b) La $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Skriv $\mathbf{v}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorene fra oppgave a), og regn ut grenseverdien

$$\lim_{n\to\infty} A^n \mathbf{v}$$

Oppgave 2. La funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x, y) = 2xy^2 + 4xy - x^2 + 1$$

a) Finn de stasjonære punktene til f.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er sadelpunkter, lokale minimumspunkter eller lokale maksimumspunkter.

c) Finn den minste verdien til funksjonen f under bibetingelsen

$$x - y^2 - 2y = 0$$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3.

a) Forklar hvorfor rekka $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$ konvergerer.

b) Finn konvergensområdet til rekka $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$

c) Finn summen av rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

og bruk dette til å vise at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n} = 2\ln 2$$

Oppgave 4. Et område A i (x, y)-planet er avgrenset av de to parablene $y = x^2 - 1$ og $y = 1 - x^2$.

a) Finn arealet av A.

b) Et vektorfelt $\mathbf{F}$ er definert over området A ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^3 - y + x)\mathbf{i} + (2x + y^2 + 3xy^2)\mathbf{j}$$

Finn linjeintegralet av $\mathbf{F}$ langs randa ∂A til området A, orientert mot klokka.

SLUTT.

(Fortsettes på side 3.)

FORMELSAMLING FOR MAT 1110

Rekker

Taylorrekken til f om a: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

Geometriske rekker: $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, konvergensområde $(-1,1)$

Binomiske rekker: $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, konvergensradius 1 for $\alpha \notin \mathbf{N}$

Noen Taylorrekker: $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, konvergensområde $[-1,1)$

$\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, konvergensområde $[-1,1]$

Taylors formel: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Funksjoner av flere variable

Gradienten: $\nabla f(\mathbf{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}))$

Kjerneregelen. På matriseform: $\mathbf{H}'(\mathbf{a}) = \mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\mathbf{G}'(\mathbf{a})$

På komponentform: $\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_m}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\mathbf{a})$

Linearisering av F: $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \mathbf{F}(\mathbf{a})$

Normalvektor: $\mathbf{n} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Tangentplan: $z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$

Newtons metode: $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - (\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$

Annenderiverttesten: Anta at (a,b) er et stasjonært punkt og la $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$, $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Da gjelder:
i) Hvis $D < 0$, er (a,b) et sadelpunkt.
ii) Hvis $D > 0$ og $A > 0$, er (a,b) et lokalt minimum.
iii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$, er (a,b) et lokalt maksimum.

Lagranges multiplikatormetode: $\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{a}) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{a}) \cdots + \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{a})$ (eller gradientene på høyre side lineært avhengige).

(Fortsettes på side 4.)

Derivasjon av omvendt funksjon: $(\mathbf{F}^{-1})'(\mathbf{y}) = \mathbf{F}'(\mathbf{x})^{-1}$ der $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Derivasjon av implisitt funksjon: Hvis $f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$, så $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x},g(\mathbf{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x},g(\mathbf{x}))}$

Parametriserte kurver og linjeintegraler

Hastighet: $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))$

Fart: $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}$

Akselerasjon: $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) = (x_1''(t), x_2''(t), \ldots, x_n''(t))$

Banekselerasjon: $a(t) = v'(t)$

Buelengde: $s = L(a,b) = \int_a^b v(t)\ dt = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}\ dt$

Linjeintegral av skalarfelt: $\int_{\mathcal{C}} f\ ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))v(t)\ dt$

Linjeintegral av vektorfelt: $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{v}(t)\ dt$

Integral av gradient: $\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$

Nødvendig betingelse for konservativt felt: $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ alle $\mathbf{x}, i, j$.

Multiple integraler

Skifte av variabel: $\iint_D f(x,y)\ dxdy = \iint_S f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\ dudv$

Polarkoordinater: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, Jacobideterminant: r

Sylinderkoordinater: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$, Jacobideterminant: r

Kulekoordinater: $x = \rho\sin\phi\cos\theta, y = \rho\sin\phi\sin\theta, z = \rho\cos\phi$, Jacobideterminant: $\rho^2\sin\phi$

Flateintegral: Generelt: $\int_S f\ dS = \iint_R f(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv$

For $z = g(x,y)$: $\int_S f\ dS = \iint_R f(x,y,g(x,y))\sqrt{1 + (\frac{\partial g}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g}{\partial y})^2}\ dxdy$

Greens teorem: $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\mathcal{C}} P\ dx + Q\ dy$

Kjeglesnitt

Parabel: $(y-n)^2 = \pm 4a(x-m)$ eller $(x-m)^2 = \pm 4a(y-n)$, brennvidde: $a > 0$

(Fortsettes på side 5.)

Ellipse: $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$, brennvidde: $c = \sqrt{|a^2 - b^2|}$

Hyperbel: $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ eller $\frac{(y-n)^2}{b^2} - \frac{(x-m)^2}{a^2} = 1$, brennvidde: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, asymptoter: $y - n = \pm\frac{b}{a}(x - m)$

Vektorregning og determinanter

Vektorprodukt: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2\,, a_3b_1 - a_1b_3\,, a_1b_2 - a_2b_1)$

Determinanter: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Regneregler for determinanter: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, $\det(A^T) = \det(A)$

Matriser og lineæravbildninger

Def. av lineæravbildning: (i) $\mathbf{T}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{T}(\mathbf{x})$, (ii) $\mathbf{T}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{x})+\mathbf{T}(\mathbf{y})$

Def. av affinavbildning: $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{c}$

Matrisen til en lineæravbildning T: $A = (\mathbf{T}(\mathbf{e}_1), \mathbf{T}(\mathbf{e}_2)\ldots, \mathbf{T}(\mathbf{e}_n))$

Egenvektor v og egenverdi λ: $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

Betingelse for egenverdi: $\det(\lambda I_n - A) = 0$