UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra.
Eksamensdag:	Fredag 24. mars 2023.
Tid for eksamen:	15:00 – 17:00.
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen består av 15 oppgaver og alle oppgavene teller likt. Midtveiseksamen bidrar med $\frac{1}{3}$ av den endelige karakteren i emnet. Det er bare ett riktig alternativ på hver oppgave. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på en oppgave, får du 0 poeng på den oppgaven. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette.

Lykke til!

Oppgave 1. Lineariseringen av avbildingen

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + xy^4 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

i punktet $(1, 1)$ er gitt ved

a)

b)

c)

d)

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x + 4y - 2 \\ 2x + 2y - 2 \end{pmatrix}$$

e)

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2. La (x, y, z) betegne koordinater i $\mathbb{R}^3$. Tangentplanet til funksjonen

$$f(x, y) = x^2 - 2x^2y + 1$$

i punktet $(1, 1, f(1, 1))$ har likning

a) $z = 4 - 2x - 2y$

b)

c)

d)

e)

Oppgave 3. Vi har to deriverbare funksjoner $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ og $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Anta at $G(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$ og at

$$G'(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, F'(1,1,1) = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dersom vi setter $H(\mathbf{x}) = F(G(\mathbf{x}))$ har vi at $H'(1, 1, 1)$ er lik

a)

b)

c)

d)

e) $(15, 5, 28)$

Oppgave 4. Egenvektorer og egenverdier til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 \\ -4 & 7/3 \end{pmatrix}$$

er

a) Egenvektorer $(1, 3)$ og $(1, 2)$ og egenverdier henholdsvis 1 og 1/3.

b)

(Fortsettes på side 3.)

c)

d)

e)

Oppgave 5. La $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ betegne egenvektorene fra forrige oppgave, med tilhørende egenverdier λ_1, λ_2 der $\lambda_1 > \lambda_2$. Vi setter $\mathbf{x} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$. Vi har at

$$\lim_{n\to\infty} A^n\mathbf{x}$$

er

a)

b)

c) $a\mathbf{v}_1$

d)

e)

der A er matrisen fra Oppgave 4.

Oppgave 6. Buelengden B til kurven

$$\mathbf{r}(t) = (\sin(2t), 5t, \cos(2t)), \quad 0 \leq t \leq 3,$$

er gitt ved

a) $3\sqrt{29}$

b)

c)

d)

e)

(Fortsettes på side 4.)

Løsning: Vi har $\mathbf{r}'(t) = (2\cos(2t), 5, 2\sin(2t))$, så

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{29} = 3\sqrt{29}$$

Buelengden er

$$\int_0^3 \sqrt{29} dt$$

Oppgave 7. Akselerasjonen og baneakselerasjonen til kurven

$$\mathbf{r}(t) = (\sin(2t), 5t, \cos(2t)), \quad 0 \leq t \leq 3,$$

er gitt ved

a)

b) $\mathbf{a}(t) = (-4\sin(2t), 0, -4\cos(2t))$ og $a(t) = 0$.

c)

d)

e)

Oppgave 8. Regn ut linjeintegralet

$$L = \int_{\mathcal{C}} f\, ds$$

når $f(x, y) = x^2 y$ og $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (2t, 7t), \quad t \in [0, 3]$$

a)

b)

c)

d)

e) $567\sqrt{53}$

(Fortsettes på side 5.)

Løsning: Vi har

$$\int_0^3 4t^2 7t\sqrt{53}dt = \int_0^3 28t^3\sqrt{53}dt = [7t^4]_0^3\sqrt{53} = 567\sqrt{53}$$

Oppgave 9. Regn ut linjeintegralet

$$L = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

når $\mathbf{F}(x, y) = (xy, xy^3)$ og kurven $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (-t, 2t), \quad t \in [0, 1]$$

a)

b)

c)

d) $-38/15$

e)

Løsning:
Vi har

$$\int_0^1 (-2t^2, -8t^4) \cdot (-1, 2)dt = \int_0^1 2t^2 - 16t^4 dt = 2/3 - 16/5 = 10/15 - 48/15 = -38/15. \tag{1}$$

Oppgave 10. En potensialfunksjon ϕ til vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2, 2xy + z^2, 2zy)$$

er gitt ved

a) $\phi(x, y, z) = xy^2 + z^2y + 4$

b)

c)

d)

e)

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 11. La $\mathcal{C}$ være den parametriserte kurven

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos^3(t)\sin^3(t) + t)$$

hvor $t \in [0, 2\pi]$, og la $\mathbf{F}$ være vektorfeltet fra Oppgave 10. Integralet

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

er lik

a) 0

b)

c)

d)

e)

Oppgave 12. La $f(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$. I polarkoordinater (r, θ) har vi at

a)

b)

c)

d)

e) $f(r, \theta) = r^4$

Oppgave 13. La B være en $n \times n$-matrise. Hvilken av følgende er ikke ekvivalent med de andre

a)

b)

c) B er radekvivalent med en matrise på trappeform der en søyle ikke er en pivot-søyle.

d)

e)

(Fortsettes på side 7.)

Oppgave 14. La A være 3×3-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Hvilken av følgende påstander er sann?

a)

b)

c)

d) Likningen $A\mathbf{x} = 0$ har uendelig mange løsninger.

e)

Oppgave 15. For hvilke $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ har følgende likningssystem ingen løsning.

$x + y + 2z = b_1$

$x - 2y + 3z = b_2$

$x + 4y + z = b_3$

a) $b_1 = b_2 = b_3 = 1$

b) For alle b_1, b_2, b_3 med $b_3 + b_2 - 2b_1 = 0$.

c) For alle b_1, b_2, b_3 med $b_3 + b_2 - 2b_1 \neq 0$.

d) For alle b_1, b_2, b_3 med $b_3 + 2b_2 - b_1 \neq 0$.

e) For alle b_1, b_2, b_3 med $b_3 + 2b_2 - b_1 = 0$.

Løsning:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & -2 & 3 & b_2 \\ 1 & 4 & 1 & b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -3 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 3 & -1 & b_3 - b_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -3 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 + b_3 - 2b_1 \end{pmatrix}$$

a) I så fall har vi uendelig mange løsninger.
b) I så fall har vi uendelig mange løsninger.
c) I så fall har vi ingen løsninger.
d) For $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ har vi $1 + 2 - 1 = 2 \neq 0$, men vi har løsninger.
e) Hvis vi setter $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ har vi løsning.

SLUTT.