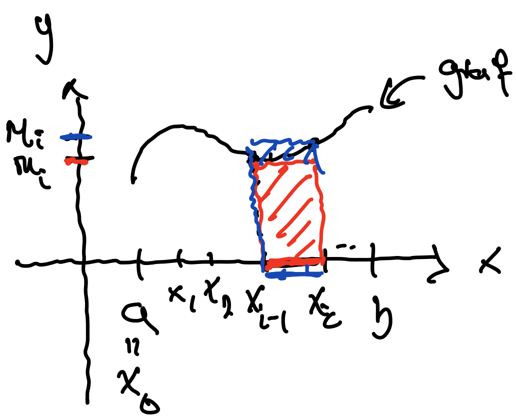
6.1 DOBBELTINTEGRALER OVER REKTANGER.

FRA CALCULUS: La $[a,b] \subset \mathbb{R}$, la $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ være en begrenset funksjon. Anta at vi ønsker å finne arealet under grafen til f.



La

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

være en såkalt partisjon π av $[a,b]$.

La
$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Sett:
$$N(\pi) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{m_i (x_i - x_{i-1})}$$
$$\Phi(\pi) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{M_i (x_i - x_{i-1})}.$$

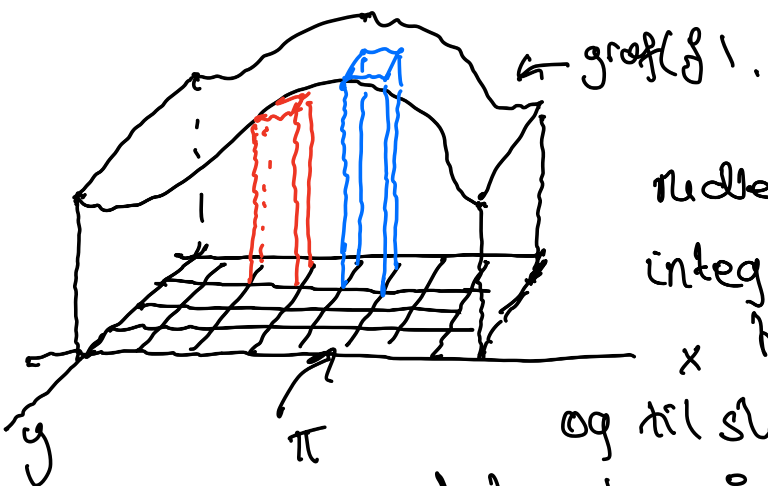
$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \sup_{\pi} N(\pi) \qquad \text{(nedreintegr.)}$$

$$\overline{\int_{[a,b]}} f(x)\,dx = \inf_{\Pi} \emptyset(\Pi) \quad \text{(øvreintegral)}$$

<u>DEF</u>: f er integrerbar dersom øvreintegralet er lik nedreintegralet, og vi betegner det med

$$\int_a^b f(x)\,dx .$$

<u>To variable</u>: La nå $R = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$, og la $f: R \to \mathbb{R}$ være begrenset. Vi ønsker å definere volumet under grafen til f.



Definer $N(\Pi)$, $\emptyset(\Pi)$, nedreintegralet og øvreintegralet analogt med hva gjorde over, og til slutt definere hva det vil si å være integrerbar.

Integralet betegnes

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy .$$

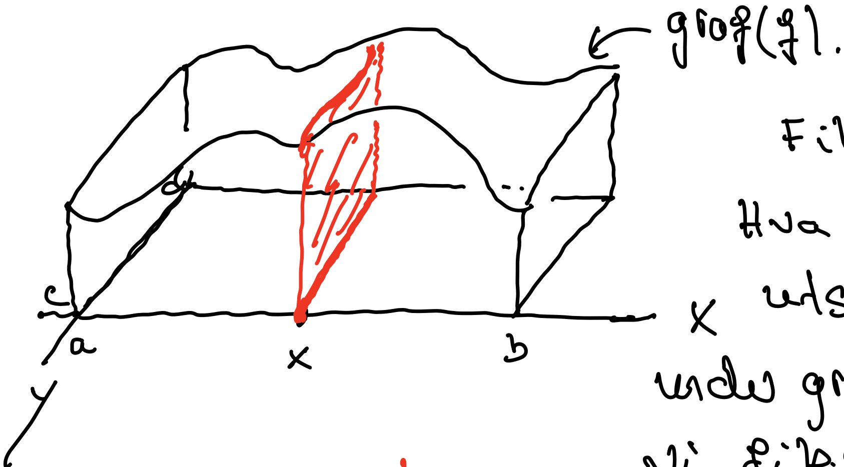
- Sjekk ut Setning 6.1.2.

Teorem 6.1.5: La $f: R \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig. Da er f integrerbar.

ITERERTE INTEGRALER

La $R = [a,b] \times [c,d]$ være et rektangel i $\mathbb{R}^2$, og la $f: R \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig funksjon. Hvordan regne ut

$$\int_R f(x,y)\, dx\, dy \;?$$



Fikserer $x \in [a,b]$. Hva er arealet av utsnittet vi får under grafen dersom vi fikserer x?

$$A_x = \int_c^d f(x,y)\, dy$$

Nå burde volumet under grafen i $\mathbb{R}^3$

være

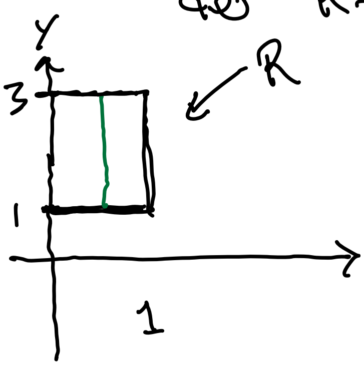
(*) $$\int_a^b A_x\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Se i boka: en begrunnelse ved bruk av Riemannsummer.

$$\boxed{\text{Teorem: } \quad \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = (*)}.$$

(*) kalles et iterert integral.

EKS: Beregn integralet $\iint_R x^2y\,dx\,dy$ der $R=[0,1]\times[1,3]$.



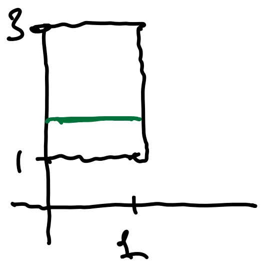
$f(x,y)=x^2y$ er kontinuerlig.

$$\iint_R x^2y\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_1^3 x^2y\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}x^2y^2 \right]_1^3 dx$$

$$= \int_0^1 (9/2)x^2 - (1/2)x^2\,dx = \int_0^1 4x^2\,dx = \frac{4}{3}.$$

Hva skjer om vi bytter om på rollene til x og y?



$$\int_1^3 \left(\int_0^1 x^2 y \, dx \right) dy = \int_1^3 \left[\frac{1}{3} x^3 y \right]_0^1 dy$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{3} y \, dy$$

$$= \frac{1}{3} \int_1^3 y \, dy = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_1^3 = \underline{\frac{4}{3}}.$$

Vi får altså samme svar!

Ikke tilfeldig, vi har alltid

$$\boxed{\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \, dx \right) dy \quad \text{for kontinuerlig } f.}$$

Eks: La $R = [0, \pi] \times [0, 1]$, $f(x,y) = x^7 \cos(x^4 y)$.

$$\iint_R f(x,y) \, dx \, dy = \int_0^\pi \left(\int_0^1 x^7 \cos(x^4 y) \, dy \right) dx$$

$$= \int^\pi \left[x^3 \sin(x^4 y) \right]^1 dx$$

$$= \int_0^{\pi} x^3 \sin(x^4)\, dx$$

enten subst. eller i hodet

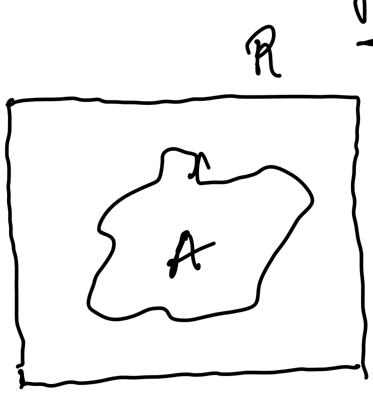
$$= \left[-(1/4)\cos(x^4)\right]_0^{\pi} = -(1/4)(\cos\pi^4 - 1).$$

Merk: Hvis du begynner med x først blir dette verre. V.

DOBBELTINTEGRALER OVER BEGRENSEDE OMRÅDER.

La $A \subset \mathbb{R}^2$ være en begrenset mengde, og la $f : A \to \mathbb{R}$ være en funksjon. Velg et rektangel R s.a. $A \subseteq R$. Definer f_A på R ved

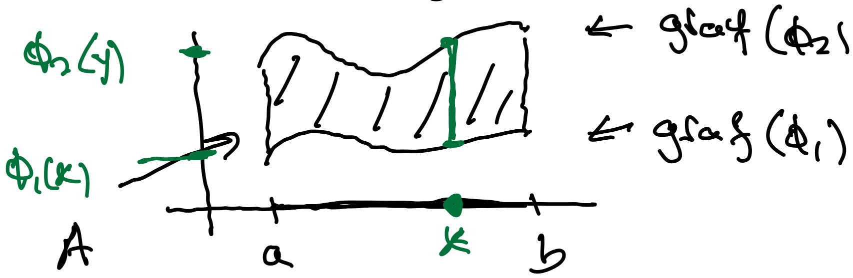
$$f_A(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{dersom } (x,y) \in A \\ 0 & \text{dersom } (x,y) \notin A \end{cases}$$



Vi sier at f er integrerbar på A dersom f_A er integrerbar på R.

Vi skal se på to typer begrensede områder.

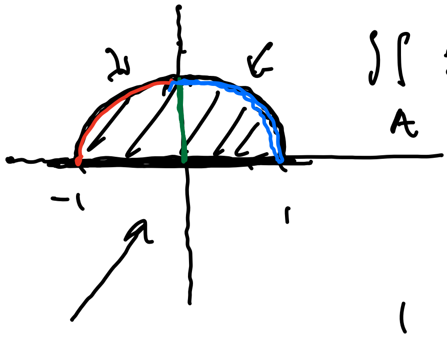
- La $[a,b] \subset \mathbb{R}$ og la $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ være kontinuerlige med $\phi_1 \leq \phi_2$.
  Området
  $$A = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$
  sies å være av type I.



Setning 6.2.1. Anta at $f : A \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig. Da er f integrerbar på A og

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

<u>EKS</u>: La
$$A = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$
La $f(x,y) = x^2 y$.



$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y \, dy \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\left(\tfrac{1}{2}\right) x^2 y^2 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x^2(1-x^2)\right) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 - x^4 \, dx = \underline{2/15}.$$

La $[c,d] \subset \mathbb{R}$ og la $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ være kontinuerlige funksjoner, $\psi_1 \leq \psi_2$. Området

$$A = \{ (x,y) : c \leq y \leq d, \ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \}$$

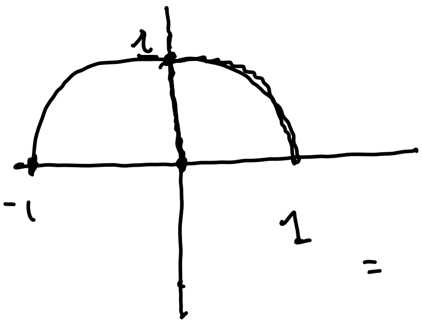
sies å være av type II.

Setning 6.2.2. La f være kontinuerlig på A. Da er f integrerbar på A og

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Eks: La $A = \{ (x,y) : 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \}$

$$f(x,y) = x^2 y.$$



$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^2 y \, dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left[(1/3)\, x^3 y \right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 y(1-y^2)^{3/2}\, dy = \frac{2}{3}\left[\left(-\frac{1}{5}\right)(1-y^2)^{5/2} \right]_0^1 = 2/15$$