16. februar 2023

MAT1110

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 2. mars 2023, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

x

LYKKE TIL!

Før vi starter minner vi om at standard basisvektorer for $\mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

For enhver vektor

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

har vi da at

$$\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{e}_1 + a_2 \cdot \mathbf{e}_2 + a_3 \cdot \mathbf{e}_3.$$

NB: Husk MATLAB/Python-utskrifter.

Oppgave 1. Vi definerer vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Bruk MATLAB/Python til å vise at vektorene $\mathbf{v}_j$ står innbyrdes vinkelrett på hverandre.

b) Finn en (3×3)-matrise A slik at $A\mathbf{e}_j = \mathbf{v}_j$ for $j = 1, 2, 3$.
Vis at for en vektor

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

så har vi at

$$A \cdot \mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{v_1} + a_2 \cdot \mathbf{v_2} + a_3 \cdot \mathbf{v_3}.$$

c) Bruk MATLAB/Python til å finne den inverse matrisen B til A. Verifiser i MATLAB/Python at $B\mathbf{v}_j = \mathbf{e}_j$ for $j = 1, 2, 3$.

d) La $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Definer en vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ ved

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Forklar hvorfor vi har at

$$\mathbf{b} = a_1 \cdot \mathbf{v_1} + a_2 \cdot \mathbf{v_2} + a_3 \cdot \mathbf{v_3}.$$

Oppgave 2. Vi definerer en (3×3)-matrise C ved

$$C = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix}$$

a) Vis at vektorene $\mathbf{v}_j$ fra oppgave **a** er egenvektorer for matrisen C og finn de tilhørende egenverdiene.

b) Sett

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Finn

$$\lim_{n \to \infty} C^n \mathbf{b}.$$

Her er C^n matrisen du får hvis du komponerer/multipliserer matrisen C med seg selv n ganger:

$$C^n = \underbrace{C \cdot C \cdot \ldots \cdot C}_{n \text{ ganger}}.$$

Oppgave 3. Vi parametriserer en kurve $\mathcal{C}$ i $\mathbb{R}^3$ ved

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), 4\sin^2(4t)), t \in [0, \pi].$$

a) Tegn kurven i MATLAB/Python.

b) Vi definerer et vektorfelt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (5x^4 + 2xy^3 - yze^{xyz}, 3x^2y^2 - xze^{xyz}, -xye^{xyz})$$

Beregn

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

SLUTT