19. mars 2023

MAT1140

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 2. mars 2023, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

x

LYKKE TIL!

Før vi starter minner vi om at standard basisvektorer for $\mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

For enhver vektor

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$$

har vi da at

$$\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{e}_1 + a_2 \cdot \mathbf{e}_2 + a_3 \cdot \mathbf{e}_3.$$

Oppgave 1. Vi definerer vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}.$$

a) Bruk MATLAB/Python til å vise at vektorene $\mathbf{v}_j$ står innbyrdes vinkelrett på hverandre.

Løsing: Definer vektorene i MATLAB og bruk kommandoene dot$(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$.

b) Finn en (3×3)-matrise A slik at $A\mathbf{e}_j = \mathbf{v}_j$ for $j = 1, 2, 3$.
Vis at for en vektor

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$$

så har vi at

$$A\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{v_1} + a_2 \cdot \mathbf{v_2} + a_3 \cdot \mathbf{v_3}.$$

Løsning:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1\\1 & -2 & 0\end{bmatrix}.$$

Vi har at

$$\begin{aligned} A \cdot \mathbf{a} &= A \cdot (a_1 \cdot \mathbf{e}_1 + a_2 \cdot \mathbf{e}_2 + a_3 \cdot \mathbf{e}_3) \\ &= a_1 \cdot (A \cdot \mathbf{e}_1) + a_2 \cdot (A \cdot \mathbf{e}_2) + a_3 \cdot (A \cdot \mathbf{e}_3) \\ &= a_1 \cdot \mathbf{v_1} + a_2 \cdot \mathbf{v_2} + a_3 \cdot \mathbf{v_3}. \end{aligned}$$

c) Bruk MATLAB/Python til å finne den inverse matrisen B til A. Verifiser i MATLAB/Python at $B\mathbf{v}_j = \mathbf{e}_j$ for $j = 1, 2, 3$.

Løsning: Bruk kommandoen $B = \mathrm{inv}(A)$.

d) La $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Definer en vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ ved

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Forklar hvorfor vi har at

$$\mathbf{b} = a_1 \cdot \mathbf{v_1} + a_2 \cdot \mathbf{v_2} + a_3 \cdot \mathbf{v_3}.$$

Løsning: Vi har at

$$A \cdot \mathbf{a} = A \cdot (B \cdot \mathbf{b}) = (A \cdot B) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Da kan vi bruke **1b)**.

Oppgave 2. Vi definerer en (3×3)-matrise C ved

$$C = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix}$$

a) Vis at vektorene $\mathbf{v}_j$ fra oppgave **a** er egentvektorer for matrisen C og finn de tilhørende egenverdiene.

Løsing: Regn ut for hånd, eller bruk MATLAB (men ikke bruk kommandoen eig - da finner ikke MATLAB de to siste egenvektorene). Egenverdien for $\mathbf{v}_1$ er 1, mens den andre egenverdien er $1/2$.

b) Sett

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Finn

$$\lim_{n\to\infty} C^n \mathbf{b}.$$

Løsning: Definer vektoren $\mathbf{b}$ i MATLAB. Regn ut at

$$B\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(eller gjør det for hånd.) I følge oppgave **1c** har vi da at

$$\mathbf{b} = 4\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3.$$

Vi får at

$$\begin{aligned} C^n\mathbf{b} &= C^n(4\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3) \\ &= 4C^n\mathbf{v}_1 + C^n\mathbf{v}_2 - 2C^n\mathbf{v}_3) \\ &= 4(1^n)\mathbf{v}_1 + (\frac{1}{2})^n\mathbf{v}_2 - 2(\frac{1}{2})^n\mathbf{v}_3 \\ &= 4\mathbf{v}_1 + (\frac{1}{2})^n\mathbf{v}_2 - 2(\frac{1}{2})^n\mathbf{v}_3 \underset{n\to\infty}{\to} 4\mathbf{v}_1. \end{aligned}$$

Oppgave 3. Vi parametriserer en kurve $\mathcal{C}$ i $\mathbb{R}^3$ ved

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), 4\sin^2(4t)), t \in [0, \pi].$$

a) Tegn kurven i MATLAB/Python.

b) Vi definerer et vektorfelt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (5x^4 + 2xy^3 - yze^{xyz}, 3x^2y^2 - xze^{xyz}, -xye^{xyz})$$

Beregn

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Løsing:

a) Tegn.

b) En mulighet: Observer at vektorfeltet et konservativt. Siden vektorfeltet er glatt på hele $\mathbb{R}^3$ holder det å sjekke at

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

for alle i, j. Observer så at $\mathcal{C}$ er en kurve som binder sammen punktene $(1, 0, 0)$ og $(-1, 0, 0)$. Siden $\mathbf{F}$ er konservativt er integralet uavhengig av vei, så vi kan i stedet integrere over den rette linja som binder sammen disse punktene. Vi får da

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{-1}^{1} 5x^4 dx = -[1^5 - (-1)^5] = -2.$$

En annen mulighet: Observer at

$$\phi(x, y, z) = x^5 + x^2y^3 - e^{xyz}$$

er et potensiale for $\mathbf{F}$. Dermed har vi at

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(-1, 0, 0) - \phi(1, 0, 0) = -2 - 0 = -2.$$

SLUTT