19. april 2023

MAT1110

Obligatorisk oppgave 2 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 27. april 2023, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

x

LYKKE TIL!

Når vi i denne oppgaven snakker om $n \times n$-matriser, skal vi tillate *komplekse* matriser. Det vil si at elementene a_{ij} i en matrise

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdot & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

er komplekse tall. Dersom vi skriver at A er en *reell* matrise, mener vi at alle a_{ij} faktisk er reelle.

I Obligen er det likevel lov å bruke alle resultater fra læreboka selv om disse er formulert for reelle matriser (de er sanne for komplekse matriser).

Vi sier at en $n \times n$-matrise $A = (a_{ij})$ er *diagonal* dersom $a_{ij} = 0$ dersom $i \neq j$, og vi sier at den er *nedre trianglulær* dersom $a_{ij} = 0$ dersom $j > i$.

INTRODUKSJON: Dersom A er en $n \times n$-matrise er det ofte nyttig å finne en inverterbar matrise M slik at $B = M^{-1}AM$ er på en enklere form. For eksempel, dersom man er interessert i å studere A^n for store n, eller å undersøke hva som skjer når $n \to \infty$, kan vi observere at $A = MBM^{-1}$ og videre at

$$A^n = (MBM^{-1})^n = MB^nM^{-1} \text{ (hvorfor?)}$$

så hvis vi forstår B^n er vi godt i gang.

I denne obligen skal vi undersøke noen tilfeller for $n = 2$. Det beste ville være om vi kan arrangere at B er en diagonal matrise. Det nest beste er om vi kan arrangere at B er nedre trianglulær. Vi skal se følgende.

- I veldig mange tilfeller kan vi faktisk arrangere at B er diagonal (Oppgave 2). I så fall sier vi at A kan *diagonaliseres*.
- Det fins reelle matriser der vi ikke kan arrangere at B er diagonal samtidig som M er reel, men der det er mulig dersom vi tillater at M er kompleks (Oppgave 3).
- Dersom vi tillater komplekse matriser M kan vi alltid arrangere at B er nedre triangulær (Oppgave 4).
- Det er ikke alltid mulig å arrangere at B er nedre triangulær dersom vi bare tillater reelle matriser M (Oppgave 5 - valgfri).

Oppgave 1.

La A være en $n \times n$-matrise, og la M være en inverterbar $n \times n$-matrise. Vis at λ er en egenverdi for A hvis og bare hvis λ er en egenverdi for $B = M^{-1}AM$, og at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A hvis og bare hvis $M^{-1}\mathbf{v}$ er en egenvektor for $B = M^{-1}AM$.

Oppgave 2.

La A være en 2×2-matrise.

a) La λ_1, λ_2 være egenverdier for A med egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Anta at $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Vis at $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v}_2\}$ utgjør en basis for $\mathbb{R}^2$.

b) Finn en matrise M slik at $M^{-1}AM = D$ der D er en diagonalmatrise.

c) La

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 10 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Finn en matrise M slik at $M^{-1}AM = D$ der D er en diagonalmatrise.

d) La $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Hva er $\lim_{n\to\infty} A^n\mathbf{x}$?

Oppgave 3.

La

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

der $a^2 + b^2 = 1$.

a) Forklar hvorfor det fins en $\theta \in [0, 2\pi)$ slik at $a = \cos\theta, b = \sin\theta$.

b) Vis at dersom vi identifiserer $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ med det komplekse tallet $z = x + iy$ så har vi $A\mathbf{v} = e^{i\theta}z$. Her har vi $e^{i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)$. Fra det vi har lært om komplekse tall i Kalkulus, er altså A en rotasjonsmatrise som roterer vektorer mot klokken med en vinkel θ.

c) Vis at egenverdiene til A er $\lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta$. Finn en matrise M slik at $M^{-1}AM = D$ der D er en diagonalmatrise.

d) Vis at det fins en *reel* matrise M slik at $M^{-1}AM = D$ der D er en diagonalmatrise, hvis og bare hvis $\theta = 0$ eller $\theta = \pi$.

Oppgave 4.

a) La A være en $n \times n$-matrise. Forklar hvorfor det alltid fins en egenverdi $\lambda \in \mathbb{C}$ med tilhørende egenvektor $\mathbf{v}$.

b) Vis at en 2×2-matrise B er nedre triangulær hvis og bare hvis $\mathbf{e}_2$ er en egenvektor for B.

c) La A være en 2×2-matrise. Vis at det fins en 2×2-matrise M slik at $M^{-1}AM$ er nedre triangulær.

d) La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vis at A bare har en egenvektor (opp til skalering). Bevis at A ikke kan diagonaliseres.

Oppgave 5. (Ekstra for de som er interesserte)

a) Finn en reell 2×2-matrise A slik at det ikke fins en reell 2×2-matrise M slik at $M^{-1}AM$ er nedre triangulær.

b) La A være en 2×2-matrise med egenverdier λ_1, λ_2 med $0 \leq |\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$. Vis at for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ så har vi

$$\lim_{n \to \infty} A^n \mathbf{x} = 0.$$

(Det vanskeligste tilfellet er når $\lambda_1 = \lambda_2$.)

SLUTT