UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra.

Eksamensdag: Prøveeksamen

Oppgavesettet er på 7 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1. Lineariseringen av avbildingen

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + x^2y \\ xy^3 + e^x \end{pmatrix}$$

i punktet $(1, 1)$ er gitt ved

a)
$$\begin{pmatrix} 2x + y \\ (1 + e)x + 3y - 3 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 2x + 2y - 2 \\ (1 + e)x + 3y - 3 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 2x + 2y - 2 \\ (1 + e)x + 4y - 4 \end{pmatrix}$$

d)
$$\begin{pmatrix} 2x + y - 1 \\ (1 + e)x + 3y - 3 \end{pmatrix}$$

e)
$$\begin{pmatrix} 2x + y - 1 \\ ex + 3y - 2 \end{pmatrix}$$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2. La (x, y, z, w) betegne koordinater i $\mathbb{R}^4$. Tangentplanet til funksjonen

$$f(x, y, z) = x + yz - y + z^2 - 4$$

i punktet $(1, -1, 2, f(1, -1, 2))$ har likning

a) $w = x + y + 3z - 6$

b) $w = 2x + y + 3z - 7$

c) $w = 2x + y + 3z - 5$

d) $w = 2x + 2y + 3z - 6$

e) $w = 2x + y + 2z - 6$

Oppgave 3. Vi har to deriverbare funksjoner $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ og $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Anta at $G(1, -2) = (1, 2, 3)$ og at

$$G'(1,-2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, F'(1,2,3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dersom vi setter $H(x) = F(G(x))$ har vi at $H'(1, -2)$ er lik

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 6 & 5 & 14 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 6 & 5 & 14 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 12 & -7 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

d)
$$\begin{pmatrix} 13 & -7 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

e)
$$\begin{pmatrix} 13 & -7 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4. Egenvektorer og egenverdier til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

er

a) Egenvektorer $(1,1)$ og $(1,-1)$ og egenverdier henholdsvis 1 og 1/2.

b) Egenvektorer $(1,1)$ og $(1,-1)$ og egenverdier henholdsvis 1/2 og 1.

c) Egenvektorer $(1,1)$ og $(1,-1)$ og egenverdier henholdsvis 1 og 1/3.

d) Egenvektorer $(1,1)$ og $(1,-1)$ og egenverdier henholdsvis 1/3 og 1.

e) Egenvektorer $(1,1)$ og $(1,2)$ og egenverdier henholdsvis 1 og 1/2.

Oppgave 5. La $\mathbf{x} = (2,0)$. Vi har at

$$\lim_{n\to\infty} A^n \mathbf{x}$$

er

a) $(1,-1)$

b) $(0,0)$

c) $(1,2)$

d) $(1,1)$

e) ∞

der A er matrisen fra Oppgave 2.

Oppgave 6. Buelengden B til kurven

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(t), 2, \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 3,$$

er gitt ved

a) $B = 1$

b) $B = 2$

c) $B = 3$

d) $B = 4$

e) $B = 5$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 7. Akselerasjonen og baneakselerasjonen til kurven

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(t), 2, \sin(t)), \quad 0 \le t \le 3,$$

er gitt ved

a) $\mathbf{a}(t) = (-\sin(t), 0, \cos(t)), a(t) = 0$

b) $\mathbf{a}(t) = (-\sin(t), 0, \cos(t)), a(t) = 2$

c) $\mathbf{a}(t) = (\cos(t), 0, \sin(t)), a(t) = 1.$

d) $\mathbf{a}(t) = (-\cos(t), 0, -\sin(t)), a(t) = 1.$

e) $\mathbf{a}(t) = (-\cos(t), 0, -\sin(t)), a(t) = 0.$

Oppgave 8. Regn ut linjeintegralet

$$L = \int_{\mathcal{C}} f \, ds$$

når $f(x, y) = xy$ og $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (3t, 4t), \quad t \in [0, 2]$$

a) $L = 160$

b) $L = 320$

c) $L = 80$

d) $L = 40$

e) $L = 20$

Oppgave 9. Regn ut linjeintegralet

$$L = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

når $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 y, y)$ og kurven $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (2t, -3t), \quad t \in [0, 1]$$

a) $3/2$

(Fortsettes på side 5.)

b) $5/2$

c) $-3/2$

d) $1/2$

e) 7

Oppgave 10. En potensialfunksjon ϕ til vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (yz + yz^2, xz + xz^2, xy + 2xyz)$$

er gitt ved

a) $\phi(x, y, z) = xy^2 + z^2y + 4$

b) $\phi(x, y, z) = xy^2 + 2zy^2 + 1$

c) $\phi(x, y, z) = xyz + xz^2y + 2$

d) $\phi(x, y, z) = xy + z^2y + x^2 + 3$

e) $\phi(x, y, z) = xy + zy$

Oppgave 11. La $\mathcal{C}$ være den parametriserte kurven

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos^2(t)\sin^2(t))$$

hvor $t \in [0, 2\pi]$, og la $\mathbf{F}$ være vektorfeltet fra Oppgave 10. Integralet

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

er lik

a) 2π

b) 4

c) 1

d) 0

e) π^2

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 12. La $f(x,y) = x^2 - y^2$. I polarkoordinater (r,θ) har vi at

a) $r^2(2\cos^2\theta - 1)$

b) $2\cos^2\theta - 1$

c) r^2

d) $r^2\cos^2\theta$

e) $r(2\cos^2\theta - 1)$

Oppgave 13. La B være en $n \times n$-matrise. Hvilken av følgende er ikke ekvivalent med de andre

a) Den reduserte trappeformen til B har en rad uten pivotelement.

b) Likningen $B\mathbf{x} = 0$ har uendelig mange løsninger.

c) Det fins en $\mathbf{b}$ slik at $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke har noen løsning.

d) Likningen $B\mathbf{x} = 0$ har en entydig løsning.

e) Den reduserte trappeformen til B har en kolonne uten pivotelement.

Oppgave 14. La A være 3×3-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Hvilken av følgende påstander er sann?

a) Likningen $A\mathbf{x} = 0$ har kun løsningen $\mathbf{x} = 0$.

b) Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger for alle valg av $\mathbf{b}$.

c) Den reduserte trappeformen til A har kun en pivotsøyle.

d) Determinanten til A er 0.

e) Den reduserte trappeformen til A har ingen pivotsøyler.

(Fortsettes på side 7.)

Oppgave 15. For hvilken $a \in \mathbb{R}$ har følgende likningssystem uendelig mange løsninger.

$$x + y + 2z = 0$$

$$x - 2y + 3z = 0$$

$$x + 4y + az = 0$$

a) $a = -1$

b) $a = 0$

c) $a = 1.$

d) $a = 2$

e) $a = -2$

SLUTT.