UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	Mai 2024.
Tid for eksamen:	08:00 – 16:00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Settet består av 10 deloppgaver som alle teller 6 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1. La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

b) Skriv vektoren $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ som en sum av egenvektorer for A, og regn ut grenseverdien $\lim_{n\to\infty} 3^{-n} A^n \boldsymbol{x}_0$.

Oppgave 2. I denne oppgaven skal vi se på funksjonen

$$f(x,y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

a) Finn de stasjonære punktene til f.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er sadelpunkter, lokale minimumspunkter, eller lokale maksimumspunkter (her blir det en del regning, mer enn hva som er vanlig på eksamen).

Oppgave 3. Vi har en kvadratmeter med materiale tilgjengelig, og skal bruke dette til vegger/bunn i en rektangulær boks uten topplokk (det vil si kun med bunn og fire sider). Hva er det maksimale volumet en slik boks kan få, og hva blir dimensjonene på boksen?

Oppgave 4.
I denne oppgaven skal vi beregne volumet av området avgrenset av planene $y = 2x - 1$, $y = x/2 + 1$, $y = 2x - 3$, $y = x/2 + 2$, xy-planet, og paraboloiden

(Fortsettes på side 2.)

$z = 81(x^2 + y^2)$.

a) Definer variablene $u = y - 2x$, $v = y - x/2$. Forklar at området kan beskrives ved $-3 \leq u \leq -1$, $1 \leq v \leq 2$, og vis at $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = 3/2$.

b) Regn ut volumet (dette blir også en del regning).
Hint: Du trenger å uttrykke x og y ved u og v.

Oppgave 5. La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Vis at systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke kan ha uendelig mange løsninger, uansett hva $\mathbf{b}$ er.

b) For hvilke høyresider $\mathbf{b}$ har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en entydig løsning?

Oppgave 6.
Hva blir konvergensområdet for rekken $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(x-2)^{2n+1}}{n!}$? Finn også et uttrykk for $S(x)$ der rekken konvergerer.

Lykke til!