UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	Mai 2024.
Tid for eksamen:	08:00 – 16:00.
Oppgavesettet er på 8 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Settet består av 10 deloppgaver som alle teller 6 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1. La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.
Svar: Den karakteristiske likningen blir

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-3)^2(\lambda-2) = 0, \end{aligned}$$

der vi ekspanderte determinanten langs tredje rad. Egenverdiene blir derfor $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.
Vi har at

$$2I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Komponentene i en egenvektor for $\lambda_1 = 2$ må dermed oppfylle $x = -y$, og $z = 0$, slik at en egenvektor må være på formen $\begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. Setter vi $y = 1$ få

(Fortsettes på side 2.)

vi spesielt egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vi har at

$$3I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Komponentene i en egenvektor for $\lambda_2 = 3$ må dermed oppfylle $x = -2z$, slik at en egenvektor må være på formen $\begin{pmatrix} -2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Spesielt er $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lineært uavhengige egenvektorer.

b) Skriv vektoren $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ som en sum av egenvektorer for A, og regn ut grenseverdien $\lim_{n\to\infty} 3^{-n} A^n \boldsymbol{x}_0$.

Svar: For å skrive $\boldsymbol{x}_0$ som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, og $\mathbf{v}_3$ radreduserer vi

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

slik at $\boldsymbol{x}_0 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$. Vi får dermed

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} 3^{-n} A^n \boldsymbol{x}_0 &= \lim_{n\to\infty} 3^{-n} A^n (4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) \\
&= \lim_{n\to\infty} 3^{-n} (4 \cdot 2^n \boldsymbol{v}_1 + 2 \cdot 3^n \boldsymbol{v}_2 + 3^n \boldsymbol{v}_3) \\
&= \lim_{n\to\infty} (4 \cdot (2/3)^n \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) \\
&= 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Oppgave 2. I denne oppgaven skal vi se på funksjonen

$$f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

(Fortsettes på side 3.)

a) Finn de stasjonære punktene til f.
Svar: Vi har at

$$\nabla f = \begin{pmatrix} (4x - 2x^3 - 3y^2 x)e^{-(x^2+y^2)/2} \\ (6y - 2x^2 y - 3y^3)e^{-(x^2+y^2)/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(4 - 2x^2 - 3y^2)e^{-(x^2+y^2)/2} \\ y(6 - 2x^2 - 3y^2)e^{-(x^2+y^2)/2} \end{pmatrix}.$$

Setter vi dette lik 0 får vi opplagt løsningen $x = y = 0$.
Anta så at $x = 0$, $y \neq 0$. Setter vi inn i den andre komponenten får vi at $6 - 3y^2 = 0$, slik at $y = \pm\sqrt{2}$.
Anta så at $y = 0$, $x \neq 0$. Setter vi inn i den første komponenten får vi at $4 - 2x^2 = 0$, slik at $x = \pm\sqrt{2}$.
Anta til slutt at $x \neq 0$, $y \neq 0$. Da må $4 - 2x^2 - 3y^2 = 6 - 2x^2 - 3y^2 = 0$, som er umulig.
Det følger at de eneste stasjonære punktene er $(0, 0)$, $(0, \sqrt{2})$, $(0, -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er sadelpunkter, lokale minimumspunkter, eller lokale maksimumspunkter (her blir det en del regning, mer enn hva som er vanlig på eksamen).
Svar: Vi regner ut

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= (4 - 6x^2 - 3y^2 - 4x^2 + 2x^4 + 3y^2x^2)e^{-(x^2+y^2)/2} \\
&= (4 - 10x^2 - 3y^2 + 2x^4 + 3y^2x^2)e^{-(x^2+y^2)/2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= (-6yx - 4xy + 2x^3y + 3y^3x)e^{-(x^2+y^2)/2} \\
&= (-10yx + 2x^3y + 3y^3x)e^{-(x^2+y^2)/2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (6 - 2x^2 - 9y^2 - 6y^2 + 2x^2y^2 + 3y^4)e^{-(x^2+y^2)/2} \\
&= (6 - 2x^2 - 15y^2 + 2x^2y^2 + 3y^4)e^{-(x^2+y^2)/2}.
\end{aligned}$$

Hessematrisen til f blir dermed

$$e^{-(x^2+y^2)/2} \begin{pmatrix} 4 - 10x^2 - 3y^2 + 2x^4 + 3y^2x^2 & -10yx + 2x^3y + 3y^3x \\ -10yx + 2x^3y + 3y^3x & 6 - 2x^2 - 15y^2 + 2x^2y^2 + 3y^4 \end{pmatrix}.$$

For punktet $(0, 0)$ blir Hessematrisen $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, som har egenverdiene 4 og 6 (i en diagonalmatrise står egenverdiene på diagonalen). Derfor er $(0, 0)$ et lokalt minimumspunkt.
La oss så ta for oss de to punktene dere $x = 0$. Da kan Hessematrisen forenkles til

$$e^{-y^2/2} \begin{pmatrix} 4 - 3y^2 & 0 \\ 0 & 6 - 15y^2 + 3y^4 \end{pmatrix}.$$

Siden $y^2 = 2$ blir begge Hessematrisene lik

$$e^{-1} \begin{pmatrix} 4 - 6 & 0 \\ 0 & 6 - 30 + 12 \end{pmatrix} = e^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

Begge de stasjonære punktene der $x = 0$ blir derfor lokale maksimumspunkter.

(Fortsettes på side 4.)

La oss så ta for oss de to punktene dere $y = 0$. Da kan Hessematrisen forenkles til

$$e^{-x^2/2}\begin{pmatrix} 4-10x^2+2x^4 & 0 \\ 0 & 6-2x^2 \end{pmatrix}.$$

Siden $x^2 = 2$ blir begge Hessematrisene lik

$$e^{-1}\begin{pmatrix} 4-20+8 & 0 \\ 0 & 6-4 \end{pmatrix} = e^{-1}\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Begge de stasjonære punktene der $y = 0$ blir derfor sadelpunkter.

Oppgave 3. Vi har en kvadratmeter med materiale tilgjengelig, og skal bruke dette til vegger/bunn i en rektangulær boks uten topplokk (det vil si kun med bunn og fire sider). Hva er det maksimale volumet en slik boks kan få, og hva blir dimensjonene på boksen?
Svar: La grunnflaten ha sider x og y, og høyde z. Volumet på boksen blir da $f(x,y,z) = xyz$. Siden overflaten på boksen er $xy + 2yz + 2xz$, så har vi betingelsen $g(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz - 1 = 0$. Vi får at

$$\nabla f = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}, \nabla g = \begin{pmatrix} y+2z \\ x+2z \\ 2x+2y \end{pmatrix}.$$

Det er klart at $\nabla g = 0$ hvis og bare hvis $x = y = z = 0$, men da er overflaten 0, slik at dette ikke gir oss noen kandidater til lokalt maksimum. Likningen $\nabla f = \lambda \nabla g$ kan skrives om til

$$\begin{aligned} xyz &= \lambda(xy + 2xz) \\ xyz &= \lambda(xy + 2yz) \\ xyz &= \lambda(2xz + 2yz), \end{aligned}$$

der likningene er ganget opp med x, y, og z, respektive. Sammenligner vi de to første likningene ser vi at $x = y$, og sammenligner vi de to siste likningene får vi at $y = 2z$. Betingelsen gir oss nå

$$xy + 2yz + 2xz = 4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12z^2 = 1,$$

slik at $z = \sqrt{1/12} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, og $x = y = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Det tilhørende volumet blir $V = \frac{1}{6\sqrt{3}} \approx 0.0962m^3$. Vi får ingen andre kandidater til lokale ekstremalpunkter.
Det gjenstår å argumentere for at vi faktisk har et globalt minimum.
Anta at den ene siden er $x < \epsilon$ (et lite tall). Siden $yz \leq 1$ følger det at $xyz < \epsilon$.
Anta så at den ene siden $x > 1/\epsilon$ (et stort tall). Vi har at $y \leq 1/x < \epsilon$, $z \leq 1/x < \epsilon$. Da blir $xyz = (xy)z) < \epsilon$.
Det følger at utenfor $U = [\epsilon, 1/\epsilon] \times [\epsilon, 1/\epsilon] \times [\epsilon, 1/\epsilon]$ så er volumet mindre enn ϵ. Vi kan derfor begrense problemet til det lukkede og begrensede området U. Her har f et maksimum, og dette må være et globalt maksimum. Vi vet fra Lagrange's metode at dette faller sammen med punktet vi fant over, siden det ikke er andre kandidater.

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 4.
I denne oppgaven skal vi beregne volumet av området avgrenset av planene $y = 2x-1$, $y = x/2+1$, $y = 2x-3$, $y = x/2+2$, xy-planet, og paraboloiden $z = 81(x^2 + y^2)$.

a) Definer variablene $u = y - 2x$, $v = y - x/2$. Forklar at området kan beskrives ved $-3 \leq u \leq -1$, $1 \leq v \leq 2$, og vis at $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = 3/2$.
Svar: Vi har at

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1/2 = -3/2,$$

slik at $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = 3/2$.

b) Regn ut volumet (dette blir også en del regning).
Hint: Du trenger å uttrykke x og y ved u og v.
Svar: Fra a) følger at $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 2/3$. Vi har også at $u - v = -3x/2$ slik at $x = 2(v-u)/3$, og $u - 4v = -3y$, slik at $y = (4v-u)/3$. Dermed blir volumet

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 \left[\int_{-3}^{-1} 81(x^2+y^2)\frac{2}{3}\,du\right] dv \\
&= 54\int_1^2 \left[\int_{-3}^{-1} ((2(v-u)/3)^2 + ((4v-u)/3)^2)\,du\right] dv \\
&= 6\int_1^2 \left[\int_{-3}^{-1} (4v^2 - 8uv + 4u^2 + 16v^2 - 8uv + u^2)\,du\right] dv \\
&= 6\int_1^2 \left[\int_{-3}^{-1} (20v^2 - 16uv + 5u^2)\,du\right] dv \\
&= \int_1^2 \left[120v^2u - 48u^2v + 10u^3\right]_{-3}^{-1} dv \\
&= \int_1^2 (240v^2 + 384v + 260)\,dv \\
&= \left[80v^3 + 192v^2 + 260v\right]_1^2 \\
&= 560 + 576 + 260 = 1396.
\end{aligned}$$

Oppgave 5. La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Vis at systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke kan ha uendelig mange løsninger, uansett hva $\mathbf{b}$ er.
Svar: Vi bruker radreduksjon for å få matrisen på trappeform (det er ikke

(Fortsettes på side 6.)

nødvendig å bringe den helt på redusert trappeform):

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim^{II-2I, III-I, IV-4I} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -13 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\sim^{-II/7} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2/7 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -13 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\sim^{III+2II, IV+13II} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2/7 \\ 0 & 0 & 3/7 \\ 0 & 0 & 2/7 \end{pmatrix}$$
$$\sim^{IV-2III/3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2/7 \\ 0 & 0 & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser nå at alle variable er basisvariable. Det er ingen frie variable, slik at vi ikke kan ha uendelig mange løsninger, uansett hva vi velger som høyreside $\mathbf{b}$.

b) For hvilke høyresider $\mathbf{b}$ har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en entydig løsning?
Svar: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ betyr at $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots x_n\mathbf{a}_n$, der $\mathbf{a}_i$ er søylene i A. $\mathbf{b}$ må med andre ord være en lineær kombinasjon av søylene i A. Omvendt er det klart at enhver lineær kombinasjon $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots x_n\mathbf{a}_n$ gir opphav til en løsning $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Fra a) er det også klart at søylene i A er lineært uavhengige, og dette betyr også at $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots x_n\mathbf{a}_n$ ikke kan skrives som en lineær kombinasjon av søylene i $\mathbf{a}$ på andre måter. Det følger at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning hvis og bare hvis $\mathbf{x}$ kan skrives som en lineær kombinasjon av søylene i A.
Det er også helt greit å sette opp den utvidede matrisen $(A, \mathbf{b})$ med en

(Fortsettes på side 7.)

generell $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ innsatt, og deretter radredusere denne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & b_1 \\ 2 & 1 & 2 & b_2 \\ 1 & 2 & 1 & b_3 \\ 4 & 3 & 4 & b_4 \end{pmatrix} \sim^{II-2I, III-I, IV-4I} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & b_1 \\ 0 & -7 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -2 & 1 & b_3 - b_1 \\ 0 & -13 & 4 & b_4 - 4b_1 \end{pmatrix}$$

$$\sim^{-II/7} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & -2/7 & (2b_1 - b_2)/7 \\ 0 & -2 & 1 & b_3 - b_1 \\ 0 & -13 & 4 & b_4 - 4b_1 \end{pmatrix}$$

$$\sim^{III+2II, IV+13II} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & -2/7 & (2b_1 - b_2)/7 \\ 0 & 0 & 3/7 & b_3 - (3b_1 + 2b_2)/7 \\ 0 & 0 & 2/7 & b_4 - (2b_1 + 13b_2)/7 \end{pmatrix}$$

$$\sim^{IV-2III/3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & -2/7 & (2b_1 - b_2)/7 \\ 0 & 0 & 3/7 & b_3 - (3b_1 + 2b_2)/7 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 - 2b_3/3 - \frac{35}{21}b_2 \end{pmatrix}.$$

Systemet har entydig løsning hvis og bare hvis siste søyle ikke er en pivotsøyle, det vil si hvis $b_4 - 2b_3/3 - \frac{35}{21}b_2 = 0$.
Oppgaven kan også løses ved å gjøre de inverse radoperasjonene i omvendt rekkefølge, etter å ha satt siste søyle til å være en generell vektor som ikke er en pivotsøyle. Dette er mer komplisert enn det som er beskrevet først over. Metoden med å gjøre de inverse radoperasjonene i omvendt rekkefølge er noe vi har brukt i boka til å finne en konkret høyreside som **ikke** løser $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Vi trenger altså ikke bruke samme metode her.

Oppgave 6.

Hva blir konvergensområdet for rekken $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(x-2)^{2n+1}}{n!}$? Finn også et uttrykk for $S(x)$ der rekken konvergerer.
Svar: Forholdstesten gir at

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+3)(x-2)^2}{(n+2)(n+1)} \right| \to 0$$

for alle x, slik at rekken konvergerer for alle x.
For å regne ut summen av rekka kan vi først gange med $(x-2)^2$ på begge sider:

$$(x-2)^2 S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(x-2)^{2n+3}}{n!}.$$

Integrerer vi begge sider får vi at

$$\int_2^x (t-2)^2 S(t)\, dt = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n+4}}{n!} = \frac{1}{2}(x-2)^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((x-2)^2)^n}{n!}$$
$$= \frac{1}{2}(x-2)^4 e^{(x-2)^2},$$

der vi gjenkjente Taylorrekka for e^x. Derivasjon gir så at

$$(x-2)^2 S(x) = \frac{1}{2}\left(2(x-2)^5 + 4(x-2)^3\right) e^{(x-2)^2}$$
$$= (x-2)^3((x-2)^2 + 2) e^{(x-2)^2},$$

(Fortsettes på side 8.)

slik at

$$S(x) = (x-2)((x-2)^2+2)e^{(x-2)^2}.$$

Lykke til!