UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i	MAT1110 — Kalkulus og Lineær algebra
Eksamensdag:	Prøveeksamen V2024.
Oppgavesettet er på 9 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Svarene føres i Inspera.

Eksamen består av 15 oppgaver og alle oppgavene teller likt. Midtveiseksamen bidrar med 1/3 av den endelige karakteren i emnet. Det er bare ett riktig alternativ på hver oppgave. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på en oppgave, får du 0 poeng på den oppgaven. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette". *Lykke til!*

Oppgaver

Oppgave 1. La $\mathbf{F}$ være affinavbildningen

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

og la R være rektanglet der $1 \leq x \leq 3$, $2 \leq y \leq 4$. Da vil arealet til parallellogrammet $\mathbf{F}(R)$ være

✓**A:** 100

B: 50

C: 25

D: $25\sqrt{2}$

E: 75

Løsning: Vi har at $\det A = 1 + 24 = 25$, som da er forstørrelsesfaktoren for arealer. Siden R har areal 4 så vil parallellogrammet $\mathbf{F}(R)$ ha areal $4 \cdot 25 = 100$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2. La $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ være en avbildning slik at $\mathbf{F}'(2,0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. La også $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ være en avbildning slik at $\mathbf{G}(2,0) = (2,0,-1)$ og $\mathbf{G}'(2,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Da blir Jacobimatrisen i punktet $(2,0)$ til den sammensatte funksjonen $\mathbf{H}(x,y) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(x,y))$

✓**A:** $\begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

B: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & -2 \\ 6 & 16 & 1 \end{pmatrix}$

C: $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

D: $\begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

E: $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

Løsning: Kjergeregelen sier at $\mathbf{H}'(x,y) = \mathbf{F}'(\mathbf{G})(x,y))\mathbf{G}'(x,y)$. Siden $\mathbf{G}(2,0) = (2,0,-1)$ får vi spesielt

$$\mathbf{H}'(2,0) = \mathbf{F}'(2,0,-1)\mathbf{G}'(2,0) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 3. Lengden til kurven

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{t}, 2t, \frac{2}{3}t^3\right),\ 1 \leq t \leq 2.$$

er

A: $\sqrt{3}$

B: $\sqrt{2}/2$

✓**C:** $31/6$

D: $2/5$

E: 1

Løsning: Vi har at

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \sqrt{1/t^4 + 4 + 4t^4} = \sqrt{(1/t^2 + 2t^2)^2} = 1/t^2 + 2t^2,$$

slik at buelengden blir

$$\int_1^2 (1/t^2 + 2t^2)\,dt = [-1/t + 2t^3/3]_1^2 = -1/2 + 16/3 + 1 - 2/3 = 14/3 + 1/2 = 31/6.$$

Oppgave 4. En parametrisert kurve er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}.$$

Baneakselerasjonen $a(t)$ er da

(Fortsettes på side 3.)

A: 1

B: $-\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$

C: $-\cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$

D: $\sqrt{1+4t^2}$

✓**E:** $4t/\sqrt{1+4t^2}$

Løsning: Vi har at

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2(t) + 4t^2} = \sqrt{4t^2+1}.$$

Dette gir at

$$a(t) = v'(t) = \frac{8t}{2\sqrt{4t^2+1}} = \frac{4t}{\sqrt{4t^2+1}}$$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 5. Vi har gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}.$$

Hvis kurven $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k},\ \pi/4 \le t \le 9\pi/4,$$

så blir $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

A: $1+\pi$

B: π

✓**C:** $5\pi^2/2$

D: 0

E: 3

Løsning: Vi har at

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = t^2 \sin t\,\mathbf{i} + t^2\cos t\,\mathbf{j} + \cos t \sin t\,\mathbf{k}\mathbf{r}'(t) \quad = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

slik at

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = -t^2\sin^2 t + t^2\cos^2 t + 2t \sin i \cos t = t^2\cos(2t) + t\sin(2t).$$

Vi må nå bruke delvis integrasjon

$$\int_{\pi/4}^{9\pi/4} t\sin(2t)\,dt = \left[-\frac{1}{2}t\cos(2t)\right]_{\pi/4}^{9\pi/4} + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{9\pi/4}\cos(2t)\,dt = 0$$
$$\int_{\pi/4}^{9\pi/4} t^2\cos(2t)\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\sin(2t)\right]_{\pi/4}^{9\pi/4} - \int_{\pi/4}^{9\pi/4} t\sin(2t)\,dt = \frac{5}{2}\pi^2,$$

slik at $\int_{\pi/4}^{9\pi/4} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \frac{5}{2}\pi^2$.
Det er enklere å se dette ved å observere at feltet er konservativt med potensialfunksjon $\phi(x,y,z) = xyz$. Siden kurven starter i punktet $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, \pi^2/16)$ og ender opp i punktet $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 81\pi^2/16)$ så bli integralet

$$\phi(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 81\pi^2/16) - \phi(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, \pi^2/16) = \frac{1}{2}80\pi^2/16 = 5\pi^2/2.$$

Oppgave 6. Vi har gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z) = (-xy, x^2, 1)$. Hvis kurven $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (-\sin t, \cos t, t),\ 0 \le t \le 2\pi,$$

så blir $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

A: $1-\pi$

B: 1

C: π

D: 0

✓**E:** 2π

(Fortsettes på side 5.)

Løsning: Vi har at $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (\sin t\cos t, \sin^2 t, 1)$ og $\mathbf{r}'(t) = (-\cos t, -\sin t, 1)$, slik at

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t) = -\sin t\cos^2 t - \sin^3 t + 1 = -\sin t(\cos^2 t + \sin^2 t) + 1 = 1 - \sin t.$$

Dermed får vi

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (1-\sin t)\,dt = 2\pi.$$

Oppgave 7. Vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (yze^{xyz} + 2x)\mathbf{i} + (xze^{xyz} + 4y)\mathbf{j} + (xye^{xyz} + 6z)\mathbf{k}$$

A: er ikke konservativt.

B: er konservativt, men har ingen potensialfunksjon.

✓**C:** har $\phi(x,y,z) = e^{xyz} + x^2 + 2y^2 + 3z^2$ som potensialfunksjon.

D: har $\phi(x,y,z) = e^{xyz}$ som potensialfunksjon.

E: har $\phi(x,y,z) = e^{xyz} + xyz$ som potensialfunksjon.

Løsning: Hvis $\mathbf{F}$ har en potensialfunksjon ϕ så må

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial x} &= yze^{xyz} + 2x\\
\frac{\partial\phi}{\partial y} &= xze^{xyz} + 4y\\
\frac{\partial\phi}{\partial z} &= xye^{xyz} + 6z.
\end{aligned}$$

Integrerer vi får vi at

$$\begin{aligned}
\phi(x,y,z) &= e^{xyz} + x^2 + C(y,z)\\
\phi(x,y,z) &= e^{xyz} + 2y^2 + D(x,z)\\
\phi(x,y,z) &= e^{xyz} + 3z^2 + E(x,y),
\end{aligned}$$

der C, D og E er funksjoner. Vi ser at vi kan sette $C(y,z) = 2y^2 + 3z^2$, $D(x,z) = x^2 + 3z^2$, og $E(x,y) = x^2 + 2y^2$, slik at $\phi(x,y) = e^{xyz} + x^2 + 2y^2 + 3z^2$.

Oppgave 8. Skjæringen mellom kurven $z = \sqrt{x^2+y^2}$ og planet $z = 2x+1$ gir en

A: sirkel

B: ellipse

C: parabel

✓**D:** hyperbel

E: tom mengde

Løsning: Det skjærende planet er brattere enn kjeglen. Da har vi lært at snittflaten blir en hyperbel.

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 9. Hva slags kjeglesnitt får vi som løsningen på ligningen

$$3x^2 - 12x + 2y^2 - 4y + 8 = 0?$$

A: En hyperbel med sentrum i $(1,2)$, med brennpunkter $(1,1)$ og $(3,1)$.
B: En hyperbel med sentrum i $(2,1)$, med brennpunkter $(2,0)$ og $(2,2)$.
✓**C:** En ellipse med sentrum i $(2,1)$ med brennpunkter $(2,0)$ og $(2,2)$.
D: En ellipse med sentrum i $(2,1)$ med brennpunkter $(1,1)$ og $(3,1)$.
E: En parabel med sentrum i $(1,2)$ og brennpunkt $(1,3)$.
Løsning: Vi har at

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x + 2y^2 - 4y + 8 &= 3(x^2 - 4x + 4) + 2(y^2 - 2y + 1) - 12 - 2 + 8 \\ &= 3(x-2)^2 + 2(y-1)^2 - 6, \end{aligned}$$

slik at ligningen kan skrives

$$\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1.$$

Dette er en ellipse med sentrum i $(2,1)$, med store halvakse $b = \sqrt{3}$, lille halvakse $a = \sqrt{2}$. Siden $b > a$ blir brennvidden $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{3-2} = 1$, og brennpunktene blir $(2,1) \pm (0,1)$, det vil si punktene $(2,0)$ og $(2,2)$.

Oppgave 10. Tangentplanet til funksjonen

$$f(x,y) = x^2 \cos(\pi y/x)$$

i punktet $(2,2)$ er gitt ved
A: $z = -4 + 4x$
B: $z = -4 - 4x$
✓**C:** $z = 4 - 4x$
D: $z = 4 - 4x - 4y$
E: $z = -4 - 4y$
Løsning: Vi har at $f(2,2) = -4$, og

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos(\pi y/x) + \pi y \sin(\pi y/x) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x\sin(\pi y/x),$$

slik at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,2) = -4 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2,2) = 0.$$

Dermed er tangenplanet gitt ved

$$z = f(2,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,2)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,2)(y-2) = -4 - 4(x-2) = 4 - 4x.$$

(Fortsettes på side 7.)

Oppgave 11. Vi definerer vektorene $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, og $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$. Da har vi at vektoren $\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}$

A: Kan skrives entydig som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, og $\mathbf{v}_3$ ved $\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

B: Kan skrives entydig som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, og $\mathbf{v}_3$ ved $4\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$

C: Kan ikke skrives som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, og $\mathbf{v}_3$.

✓**D:** Kan skrives som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, og $\mathbf{v}_3$ på uendelig mange forskjellige måter.

E: Kan skrives entydig som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, og $\mathbf{v}_3$ ved $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

Løsning: Vi radreduserer

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 10 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 12 & 18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siste søyle er ikke en pivotsøyle, slik at systemet har en løsning, det vil si at $\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}$ kan skrives som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, og $\mathbf{v}_3$. Siden søyle 3 ikke er en pivotsøyle kan denne ikke skrives som en lineær kombinasjon av de tre vektorene på en unik måte.

Oppgave 12. Vi har matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. Da har vi at

A: Systemet $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 19 \end{pmatrix}$ har ingen løsning.

B: De eneste pivotsøylene i A er søyle 1 og 2.

C: Systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

D: A er inverterbar.

✓**E:** De eneste pivotsøylene i A er søyle 1 og 3.

Løsning: Vi radreduserer

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 13 \\ 3 & 6 & 2 & 19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 13 \\ 0 & 0 & -19 & 19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser nå at de eneste pivotsøylene i A er søyle 1 og 3 (det er kun de tre første søylene som stammer fra A), slik at det siste alternativet er riktig. Siden spesielt A ikke er inverterbar kan vi utelukke de andre alternativene. Det første alternativet kan vi utelukke siden fjerde søyle ikke ble en pivoysøyle, for dette medførte at systemet hadde en løsning.

(Fortsettes på side 8.)

Oppgave 13. Egenverdiene til matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ er

✓**A:** -5 og 10.

B: -5, 5, og 10.

C: 5 og -10.

D: 5 og 10.

E: -5 og 0.

Løsning: Vi får

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -7 & 0 \\ -8 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 10 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 10) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -7 \\ -8 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 10)((\lambda - 2)(\lambda - 3) - 56) \\ &= (\lambda - 10)(\lambda^2 - 5\lambda - 50) = (\lambda - 10)^2(\lambda + 5), \end{aligned}$$

slik at egenverdiene er 10 og -5.

Oppgave 14. Matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ har

A: ikke to lineært uavhengige egenvektorer.

B: $(1, -1)$ og $(-4, 7)$ som egenvektorer.

C: $(1, 7)$ og $(4, -1)$ som egenvektorer.

D: $(1, 1)$ og $(-4, 7)$ som egenvektorer.

✓**E:** $(1, -1)$ og $(4, 7)$ som egenvektorer.

Løsning: Vi har at

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 3)(\lambda - 6) - 28 = \lambda^2 - 9\lambda - 10 = (\lambda - 10)(\lambda + 1),$$

slik at egenverdiene er $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 10$. Vi radreduserer

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -7 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

slik at en egenvektor må oppfylle at $x_1 = -x_2$. Spesielt er $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$ en egenvektor. Vi har også

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En egenvektor må oppfylle $7x_1 = 4x_2$. Spesielt er da $(4, 7)$ en egenvektor.

Oppgave 15. For hvilken verdi av a har systemet

$$\begin{aligned} x + 3y &= a \\ 2x + 7y &= 2 \\ -4x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

en entydig løsning?

(Fortsettes på side 9.)

A: $a = 2/3$.

B: $a = 4$.

✓**C:** $a = 25/32$.

D: $a = 3$.

E: $a = 1/3$.

Løsning: Vi radreduserer

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 7 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2-2a \\ 0 & 14 & 3+4a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2-2a \\ 0 & 0 & 3+4a-28+28a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2-2a \\ 0 & 0 & 32a-25 \end{pmatrix}$$

En entydig løsning har vi kun her når siste søyle ikke er en pivotsøyle, det vil si når $32a - 25 = 0$, det vil si når $a = 25/32$.

Det var det!