Velkommen til MAT1110!

Litt om meg

Forelesninger mandager og tirsdager

Kurssidene

To obligatoriske oppgaver (Canvas)

Opptak

Quizzer (Canvas)

Pensum: Kap. 1-2 i FVLA (Flervariabel analyse med lineær algebra)
(delvis tatt i MAT1100: Enkel lineær algebra)

Kap. 3 i FVLA (Kurver og flater)

Kap. 4 i FVLA (Lineær algebra)

Kap. 6 i FVLA (Multippel integrasjon)

Kap. 5 i FVLA (Iterasjon og optimering)

Kap. 12 i Kalkulus (Rekker)

Seksjon 1.9 i FVLA

Vi er interessert i avbildninger/funksjoner fra $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

regel som for hver $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
tilordner en $\vec{F}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$

Merk: Vi skriver: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (stor bokstav og pil).

Viktig eksempel: Hvis A er en $m \times n$-matrise, så er $\vec{T}(\vec{x}) = A\vec{x}$ en avbildning fra $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Eks. 1 La $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Da er $\vec{T}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+4 \\ 12+8 \\ 3+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$

Hva skjer med standardbasisvektorene $\vec{e}_i$ under $\vec{F}$?

$$\vec{T}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Observasjon 1: $\vec{T}$ avbilder standardbasisvektorene på søylene til A.

Observasjon 2: $\vec{T}$ oppfyller $\vec{T}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 T(\vec{e}_1) + x_2 T(\vec{e}_2) + \cdots + x_n T(\vec{e}_n)$

Bevis: Fra def. av matrisemultiplikasjon

$$T(\vec{x}) = A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n$$
$$= x_1\vec{T}(\vec{e}_1) + x_2\vec{T}(\vec{e}_2) + \cdots + x_n\vec{T}(e_n) \quad \blacksquare$$

Definisjon 1.9.1 $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kalles en lineæravbildning hvis

(i) : $\vec{F}(c\vec{x}) = c\vec{F}(\vec{x})$

(ii) : $\vec{F}(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{F}(\vec{x}) + \vec{F}(\vec{y})$

for alle $c \in \mathbb{R}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

Spesielt er $\vec{T}(\vec{x}) = A\vec{x}$ lineær, siden $\vec{T}(c\vec{x}) = A(c\vec{x}) = cA\vec{x} = c\vec{T}(\vec{x})$
$\vec{T}(\vec{x}+\vec{y}) = A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = \vec{T}(\vec{x}) + \vec{T}(\vec{y})$

Omvendt:

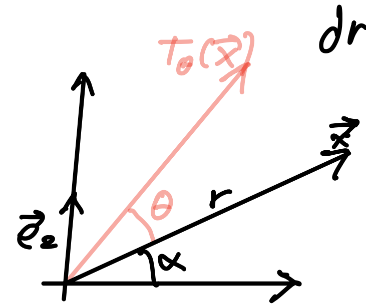
Setning 1.9.5 Hvis $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er lineær, så finnes en $m \times n$ matrise A s.a. $\vec{F}(\vec{x}) = A\vec{x}$, for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Bevis:
$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n)$$
$$= \vec{F}(x_1\vec{e}_1) + \dots + \vec{F}(x_n\vec{e}_n)$$
$$= x_1\vec{F}(\vec{e}_1) + \dots + x_n\vec{F}(\vec{e}_n)$$
$$= \begin{bmatrix} \vec{F}(\vec{e}_1) \dots \vec{F}(\vec{e}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$
$= A\vec{x}$, der A er matrisen med søyle i lik $\vec{F}(\vec{e}_i)$. ∎

Oppsummering: Vi finner matrisen til en lineær transformasjon ved å se på hva den gjør med standardbasisvektorene.

Viktige lineære transformasjoner:

1. Rotasjoner: La $\vec{T}_\theta: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være avbildningen som dreier en vektor i planet med vinkel θ.

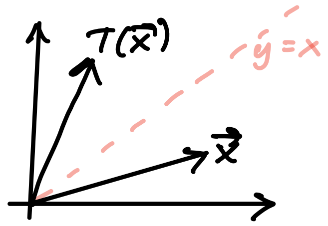


Vi viser at T_θ er lineær:
$$T_\theta(\vec{x}) = T_\theta\begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) \\ r(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\vec{x}$$

Altså: $\vec{T}_\theta$ er lineær med matrise $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Merk: $\vec{T}_\theta(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ $\quad \vec{T}_\theta(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

2. Speilinger La $\vec{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være avbildningen som speiler $\vec{x}$ om linjen $y = x$.



$\vec{T}$ er lineær siden $\vec{T}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrisen til } \vec{T}.} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Merk: $\vec{T}(\vec{e}_1) = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{T}(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Egenvektor / egenverdier

Definisjon 1.9.8 $\vec{x}$ kalles en egenvektor for $\vec{T}$ hvis det finnes en λ s.a. $T(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$
λ kalles for den tilhørende egenverdien

Har vi egenvektorer / egenverdier for speilinger?
retningen på $\vec{x}$ endres, med mindre $y = x$:

$\vec{T}\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow$ alle vektorer på formen $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ er egenvektor med egenverdi 1.

Hva med rotasjoner?

Seksjon 1.10 Affine avbildninger

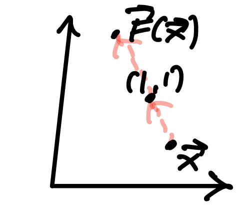
En funksjon $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kalles en affin avbildning hvis det finnes en $m \times n$-matrise A, og $\vec{c} \in \mathbb{R}^m$ s.a.

$$\vec{F}(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{c}, \quad \text{alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

A kalles matrisen til $\vec{F}$, $\vec{c}$ kalles konstantleddet til $\vec{F}$

Hvis $\vec{c} = 0$ så er $\vec{F}$ lineær.

Eksempel Avbildningen som speiler om $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ er affin:



Vi har at $\vec{F}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-x_1\\2-x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\vec{F}$ er affin med matrise $A = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

A og $\vec{c}$ kan også finnes slik:

$\vec{c}$: Siden $\vec{F}(\vec{0}) = \vec{c}$, og siden $F\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

A: $\vec{F}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \vec{c} = \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

$\vec{F}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

$\vec{F}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \vec{c} = \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

$\vec{F}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

Fikk samme A og $\vec{c}$ som i starten.

Merk: Hvis $\vec{F}_1(\vec{x}) = A_1\vec{x} + \vec{c}_1$, $\vec{F}_2(\vec{x}) = A_2\vec{x} + \vec{c}_2$

Da er $\vec{x} \to \vec{F}_1(\vec{F}_2(\vec{x}))$ affin med matrise A_1A_2

Bevis: $\vec{F}_1(\vec{F}_2(\vec{x})) = \vec{F}_1(A_2\vec{x} + \vec{c}_2)$

$$= A_1(A_2\vec{x} + \vec{c}_2) + \vec{c}_1$$

$$= \underbrace{A_1A_2}_{\text{matrisen}}\vec{x} + \underbrace{A_1\vec{c}_2 + \vec{c}_1}_{\text{konstantledd.}}$$