Forelesning 16/1 : 2.9 / 2.10 og 1.7 i FVLA

Litt mer motivasjon for egenvektorer/egenverdier

Anta $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ er egenvektorer med tilh. egenverdier λ_1 $(A\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1)$, λ_2 $(A\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2)$

Da er

$$
\begin{aligned}
&A^{100}(c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2) \\
&= c_1 A^{100}\vec{x}_1 + c_2 A^{100}\vec{x}_2 \\
&= c_1 A^{99} A\vec{x}_1 + c_2 A^{99} A\vec{x}_2 \\
&= c_1 A^{99}\lambda_1 x_1 + c_2 A^{99}\lambda_2\vec{x}_2 \\
&\vdots \\
&= c_1 \lambda_1^{100} x_1 + c_2 \lambda_2^{100} x_2 .
\end{aligned}
$$

tyngre & regne ut.

enklere å regne ut

Setning 1.10.2 Affine avbildninger avbilder rette linjer på rette linjer

Bevis: En rett linje i $\mathbb{R}^n$ kan skrive $\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{b}$, $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b}$ retn. vektor.

Anta $\vec{F}$ affin. Vi kan da skrive $\vec{F}(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{c}$. Vi får

$$
\begin{aligned}
\vec{F}(\vec{r}(t)) &= A\vec{r}(t) + \vec{c} \\
&= A(\vec{a} + t\vec{b}) + \vec{c} \\
&= \underbrace{A\vec{a} + \vec{c} + tA\vec{b}}_{\text{rett linje med retn. vektor } A\vec{b}}
\end{aligned}
$$

To rette linjer kalles parallelle hvis de har samme retningsvektor.

Setning: Affine avbildninger avbilder parallelle linjer på parallelle linjer

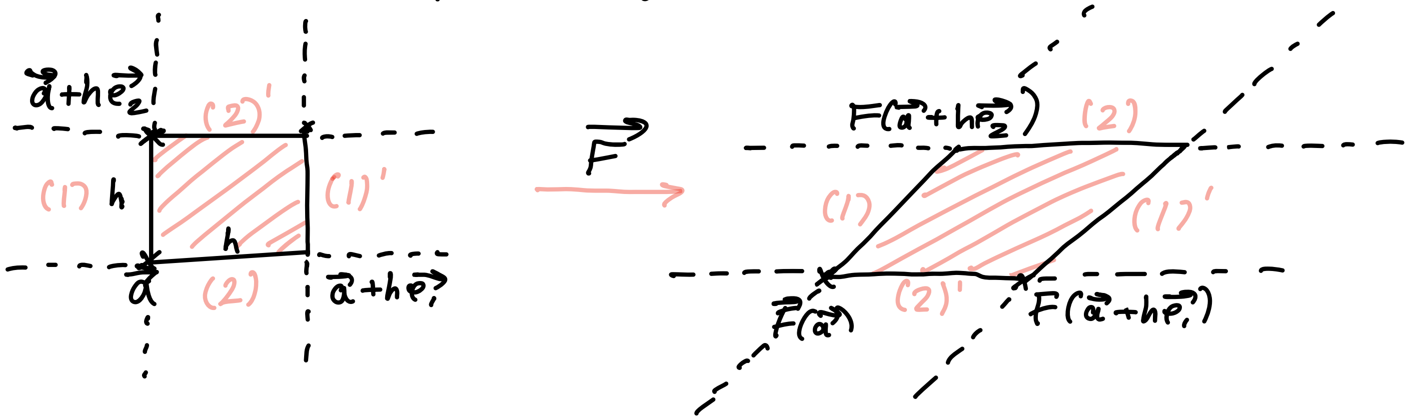
Bevis:

$$\vec{F}(\vec{a}_1 + t\vec{b}) = A(\vec{a}_1 + t\vec{b}) + \vec{c} = A\vec{a}_1 + \vec{c} + tAb$$

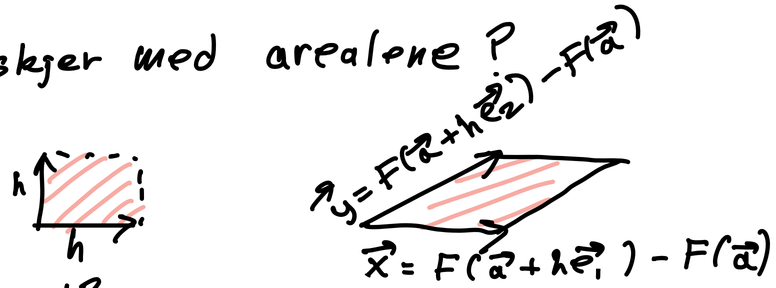
$$\vec{F}(\vec{a}_2 + t\vec{b}) = A(\vec{a}_2 + t\vec{b}) + \vec{c} = A\vec{a}_2 + \vec{c} + tAb$$

parallelle, begge har retn. vektor $A\vec{b}$. ■

Spesialtilfelle: Affine avbildninger avbilder et kvadrat på et parallellogram:



Hva skjer med arealene?



Areal h^2

Fra 1.8.2 i boka: Arealet utspent av $\vec{x}$ og $\vec{y}$ er $|\det(\vec{x},\vec{y})|$

Her: $\vec{x} = F(\vec{a}+h\vec{e_1})-F(\vec{a}) = A(\vec{a}+h\vec{e_1})+\cancel{\vec{c}}-(\cancel{A\vec{a}}+\cancel{\vec{c}}) = hA\vec{e_1}$

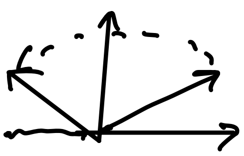
$\vec{y} = F(\vec{a}+h\vec{e_2})-F(\vec{a}) = A(\cancel{\vec{a}}+h\vec{e_2})+\cancel{\vec{c}}-(\cancel{A\vec{a}}+\cancel{\vec{c}}) = hA\vec{e_2}$

$$|\det(x,y)| = |\det(hA\vec{e_1}, hA\vec{e_2})| = h^2|\det(A\vec{e_1}, A\vec{e_2})|$$
$$= h^2|\det(\vec{a_1},\vec{a_2})|$$
$$= h^2|\det A| = \text{Areal høyre side.}$$

Så: $|\det A|$ fungerer som en forstørrelsesfaktor for å regne ut arealer.

Quiz, kap. 1-2:

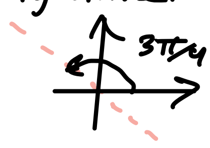
Spørsmål 1: T speiler alle punkter i planet om y-aksen.



Ser: $(1,0) \to (-1,0)$. egenvektor, $\lambda=-1$

$(0,1) \to (0,1)$. egenvektor, $\lambda = 1$

Spørsmål 2: Rotere $\underbrace{y=x}_{\text{argument } \frac{\pi}{4}}$ med $\frac{\pi}{2}$ ny vinkel: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$



$y=-x$.

Med matriser: $T_{\frac{\pi}{2}}$ har matrise: $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \\ r \end{pmatrix}$, som ligger på $y=-x$.

Spørsmål 3:

T_1: ganger x med 2, y uendret $\quad (1,0)\to(2,0)$, $(0,1)\to(0,1)$ $\Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

T_2: x uendret, ganger y med 2 $\quad (1,0)\to(1,0)$, $(0,1)\to(0,2)$ $\Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

matrisen til T_1T_2 er $A_1A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Seksjon 2.7 Kjerneregelen

$\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (kalles ofte for vektorvaluerte funksjoner).

Fra seksjon 2.6: Jacobimatrisen til $\vec{F}$ i $\vec{a}$ er

$$\vec{F}'(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

F_i er komponentene til $\vec{F}$: $\vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), \dots, F_m(\vec{x}))$.

Forutsetter her at alle komponenter er deriverbare.

Seksjon 2.6: Dette er ikke nok for at $\vec{F}$ selv skal være deriverbar.

Kjerneregelen:

Anta vi har to mengder $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, og to funksjoner $\vec{G}: A \to B$, $\vec{F}: B \to \mathbb{R}^k$.

Hvis $\vec{G}$ / $\vec{F}$ er deriverbare i $\vec{a}$ / $G(\vec{a})$

Da er den sammensatte funksjonen $\vec{H}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{G}(\vec{x}))$ deriverbar i $\vec{a}$, og Jacobimatrisen til $\vec{H}$ i $\vec{a}$ er

$$\vec{H}'(\vec{a}) = \vec{F}'(\vec{G}(\vec{a}))\,\vec{G}'(\vec{a})$$

Eksempel: La $\vec{r}$ være en kurve i $\mathbb{R}^2$ (dvs $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$)

La også $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Anta f og $\vec{r}$ begge er deriverbare.

Kjerneregelen sier nå at $h(t) = f(\vec{r}(t))$ også er deriverbar og:

$$h'(t) = f'(\vec{r}(t))\, \vec{r}\,'(t)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{r}(t)) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{r}(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underbrace{\frac{\partial x_1}{\partial t}(t)}_{x_1'(t)} \\ \underbrace{\frac{\partial x_2}{\partial t}(t)}_{x_2'(t)} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{r}(t))\, x_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{r}(t))\, x_2'(t)$$

Eksempel: Med $f(\vec{x}) = x_1^2 x_2$ $\quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \leftarrow x_1 \\ \leftarrow x_2 \end{matrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 x_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^2 \qquad x_1'(t) = 2t \qquad x_2'(t) = 3t^2$$

Vi får: $h'(t) = 2x_1 x_2\, 2t + x_1^2 \cdot 3t^2$

$$= 2t^2 \cdot t^3 \cdot 2t + t^4 \cdot 3t^2$$

$$= 4t^6 + 3t^6 = \underline{\underline{7t^6}}$$