Fra sist: Sek. 2.7 om kjerneregelen

Merk: Vi kan regne ut Jacobimatrisen til $\vec{H}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{G}(\vec{x}))$ hvis vi vet Jacobimatrisene til $\vec{F}$ og $\vec{G}$, samt $\vec{G}(\vec{x})$ (trenger ikke uttrykkene for $\vec{F}$ og $\vec{G}$)

Eksempel: Anta $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{G}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ deriverbare.
Anta og $\vec{G}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{G}'\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&4\\3&0\\1&2\end{pmatrix}$, $\vec{F}'\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&2\\1&1&3\end{pmatrix}$
Kjerneregelen sier da at $\vec{H}(\vec{x}) = \vec{F}(G(\vec{x}))$ er deriverbar i $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, og

$$\begin{aligned}\vec{H}'(\vec{a}) &= \vec{F}'(G(\vec{a}))\,\vec{G}'(\vec{a}) \\ &= \vec{F}'\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \vec{G}'\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}2&0&2\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\3&0\\1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6&12\\8&10\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Seksjon 2.8 Linearisering

Def. 2.8.2
Anta $\vec{F}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en funksjon i n variable, som er deriverbar i $\vec{a} \in A$.
Affinavbildningen $T_{\vec{a}}\vec{F}(\vec{x}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gitt ved

$$T_{\vec{a}}\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{a}) + \vec{F}'(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})$$

kalles for lineariseringen til $\vec{F}$ i $\vec{a}$

Merk:
1. $T_a\vec{F}$ er definert på hele $\mathbb{R}^n$ ($\vec{F}$ trenger ikke være det)
2. $T_a\vec{F}$ er også deriverbar i $\vec{a}$, og har samme verdi i $\vec{a}$, og Jacobimatrise i $\vec{a}$, som $\vec{F}$.

($T_a\vec{F}$ er altså en tilnærming til $\vec{F}$

Følger av at komponent i i $T_{\vec{a}}\vec{F}$ er

$$F_i(\vec{a}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_j - a_j)$$

Deriver med tanke på x_j og får $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$, slik at de har samme Jacobimatrise.

3. For en affinavbildning $\vec{F}$ så er $T_a \vec{F} = \vec{F}$:

Hvis $F(\vec{x}) = Ax + \vec{c}$, så er $F_i(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + c_i$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial F_i(x_j)}{\partial x_j} = a_{ij}$, slik at $\vec{F}'(\vec{x}) = A$

Videre er $\vec{F}(\vec{a}) = A\vec{a} + \vec{c}$, slik at

$$\begin{aligned} T_{\vec{a}} \vec{F}(\vec{x}) &= \vec{F}(\vec{a}) + \vec{F}'(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) \\ &= \cancel{A\vec{a}} + \vec{c} + A(\vec{x} \cancel{- \vec{a}}) \\ &= A\vec{x} + \vec{c} = \vec{F}(\vec{x}). \end{aligned}$$

Eksempel: Hva er lineariseringen til $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gitt ved $\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^y \\ e^{x^2} \\ xy \end{pmatrix}$ i $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Løsning: $\vec{F}(\vec{a}) = \vec{F}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{F}'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ 2xe^{x^2} & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \qquad \vec{F}'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_a \vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\vec{F}'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{F}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

Quiz kap 1-2 :

Spørsmål 4: Med $\vec{F}(x,y) = (-3x+4, 2y+4)$ så er

$$\vec{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Spørsmål 5: Linearisering av $f(x,y) = x^2+y^2$ i origo:

$f(0,0) = 0 \qquad f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix} \Rightarrow f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$T_{\vec{0}} f(x,y) = f(0,0) + f'(0,0)(\vec{x} - (0,0))$$
$$= 0$$

Spørsmål 6: Kvadrat med hjørner $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$

$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sender disse slik:

$(0,0) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(1,0) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(0,1) \to \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(1,1) \to \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bildet er parallellogrammet med disse 4 hjørnene

Spørsmål 7: $\vec{F}(x,y) = x+y \qquad \vec{G}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$

$\vec{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{G}'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\vec{F}(\vec{G}(x,y))$ har Jacobimatrise

$$\vec{F}'(\vec{G}(x,y))\,\vec{G}'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 1 \end{pmatrix}$$

Seksjon 3.1: Parametriserte kurver

Parametrisert kurve: En kont. funksjon $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^n$, der I er et intervall. Vi skriver $\vec{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

Vi skal:
1) Finne lengden til en kurve.
2) Finne hastighetsvektoren $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$
3) Finne farten, $v(t) = |\vec{v}(t)|$
4) Finne akselerasjonsvektoren $\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t) = \vec{v}\,'(t)$
5) Finne baneakselerasjonen $a(t) = v'(t)$
6) Plotte kurver i $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$

$$\begin{tikzcd} \vec{r}(t) \arrow[r] & \vec{v}(t) \arrow[r] \arrow[d] & \vec{a}(t) \\ & v(t) \arrow[r] & a(t) \end{tikzcd}$$

$\rightarrow$: derivasjon

$\downarrow$: lengde

Eksempel 1 La $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$

hastighet: $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$

fart: $v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$

akselerasjon: $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$

baneakselerasjon: $a(t) = v'(t) = (\sqrt{2})' = 0$

Eksempel 2 $\vec{r}(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2))$

$\vec{v}(t) = (-2t\sin(t^2), 2t\cos(t^2))$

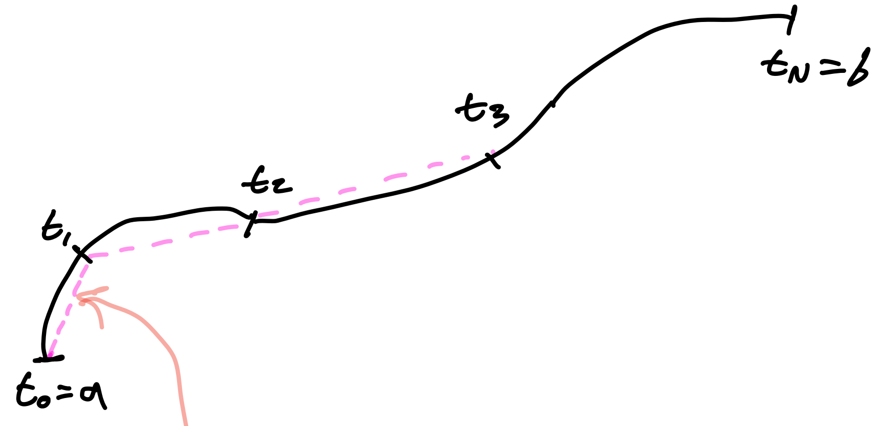
$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{4t^2\sin^2(t^2) + 4t^2\cos^2(t^2)}$

$= \sqrt{4t^2} = |2t|$

Vi ser at farten øker med tid, pga t^2-leddet.

Lengden til en kurve:

Sett $I = [a,b]$, og la $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = b$ være en partisjon av I.



lengde: $|\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)|$

$$= |(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)) - (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))|$$

$$= |(x_1(t_1) - x_1(t_0), \dots, x_n(t_1) - x_n(t_0))|$$

$$= \sqrt{(x_1(t_1) - x_1(t_0))^2 + \dots + (x_n(t_1) - x_n(t_0))^2}$$

Legger sammen lengde alle linjestykker: $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sqrt{(x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}))^2 + \dots + (x_n(t_i) - x_n(t_{i-1}))^2}$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\left(\frac{x_1(t_i) - x_1(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n(t_i) - x_n(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2}\,(t_i - t_{i-1})$$

$$\approx \sum_{i=1}^{N} \sqrt{x_1'(t_i)^2 + \dots + x_n'(t_i)^2}\,\underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\Delta t}$$

Dette er en Riemannsum for integralet $\displaystyle\int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2}\,dt$

$$= \int_a^b v(t)\,dt$$

Vi skriver også $L(a,b)$ for denne.

Lengde kalles også for buelengde.

Eksempel Buelengden til $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$:

$\vec{v}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ $v(t) = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$

$$L(a,b) = \int_0^{2\pi} v(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,dt = 2\pi\sqrt{2}.$$

Regneregler for slike kurver:

1) $\left(\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)\right)' = \vec{r}_1(t)' + \vec{r}_2(t)'$

2) $\left(\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)\right)' = \vec{r}_1{}'(t) \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2{}'(t)$