Litt mer om parametriserte kurver

Merk: Hvis $|\vec{r}(t)|$ er konstant så er $\vec{r}(t)$ og $\vec{v}(t)$ ortogonale

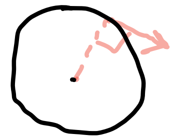
Bevis: $|\vec{r}(t)|^2 = \vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t) = \text{konstant}$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{(\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t))'}_{\vec{r}\,'(t)\cdot\vec{r}(t) + \vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t) \;=\; 2\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t)} = 0$$

$$\vec{r}\,'(t)\cdot\vec{r}(t) + \vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t) = 2\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t) = 0$$

Så i en sirkelbevegelse er $\vec{r}$ og $\vec{v}$ ortogonale



$\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{v}(t)}{v(t)}$ kalles også for enhetstangentvektoren for kurven

Siden $|\vec{T}(t)|$ er konstant $(=1)$, og $\vec{v}(t) = v(t)\vec{T}(t)$, så får vi

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = (v(t)\vec{T}(t))'$$

$$= v'(t)\vec{T}(t) + v(t)\vec{T}\,'(t)$$

$$= \underbrace{a(t)\vec{T}(t)}_{\substack{\text{akselerasjonskomponent} \\ \text{i fartsretningen.}}} + v(t)\underbrace{\vec{T}\,'(t)}_{\substack{\text{ortogonal på fartsretningen, siden} \\ \vec{T} \text{ og } \vec{T}\,' \text{ ortogonale}}}$$

Seksjon 3.2 Kjerneregel for parametriserte kurver:

Hvis $\vec{r} = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, og $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deriverbar.

Da er $h(t) = f(\vec{r}(t))$ også deriverbar, og

$$h'(t) = \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{r}(t)) \;\cdots\; \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{r}(t))\right]}_{\vec{F}\,'(G(\vec{x}))} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}}_{\vec{G}\,'(x) = \vec{r}\,'(t)}$$

$$= \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{r}(t))\, x_1'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{r}(t))\, x_n'(t)$$

Merk: En funksjon kan være avhengig av mer enn bare $\vec{r}(t)$:

I $\vec{F}(\underbrace{\vec{r}(t), t}_{\vec{G}})$ er funksjonen også avhengig av tid.

Kjerneregel på: $\vec{F}(\vec{r}(t), t)$:

$$\vec{G}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{F}'(\vec{x}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_1} & & \\ \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1(x_n)}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & \frac{\partial F_m}{\partial t} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\vec{H}'(t) = \vec{F}'(\vec{r}(t), t)\, \vec{G}'(t)$$
$$= \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_1} x_1'(t) + \cdots + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_n} x_n'(t) + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}$$

Lengde av en kurve: $\int_a^b v(t)\, dt$

Seksjon 3.3 Linjeintegraler for skalarfelt

Motivasjon: Regne ut massen til en "vaier" i rommet

$f(\vec{x})$ er tettheten til vaieren i et punkt $\vec{x}$ (kg/m)

Fra sist: Vaierens lengde $\approx \sum_{i=1}^{N} \overbrace{v(t_i)(t_i - t_{i-1})}^{\text{strekning} = \text{fart} \cdot \text{tid}}$,

masse = tetthet · strekning

På samme måte: Vaierens masse $\approx \sum_{i=1}^{N} f(\vec{r}(t_i))\, v(t_i)(t_i - t_{i-1})$

Dette er en Riemannsum for $\int_a^b f(\vec{r}(t))\, v(t)\, dt$

Dette kalles for linjeintegralet for skalarfeltet f

Vi skriver også $\int_{\mathcal{C}} f\, ds$ for dette, der $\mathcal{C}$ betegner kurven

Vi antar at $\vec{r}(t)$ er en stykkevis glatte parametrisering:

a) $\vec{r}$ kontinuerlig på $[a, b]$

b) $\vec{r}\,'$ kontinuerlig på (a, b)

Hvorfor er $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$ veldefinert, dvs. at vi får samme verdi for alle parametriseringer?

Setning 3.3.6 Hvis parametriseringene r_1, r_2 er ekvivalente, så er

$$\int_a^b f(\vec{r}_1(t))\,v_1(t)\,dt = \int_c^d f(\vec{r}_2(t))\,v_2(t)\,dt$$

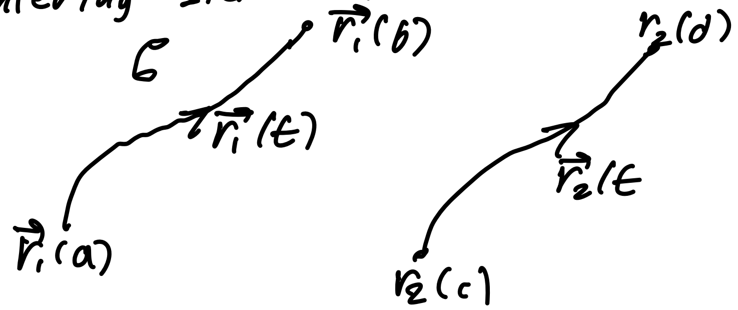
$\vec{r}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\vec{r}_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ er ekvivalente hvis det finnes en monoton funksjon ϕ s.a.

$$\vec{r}_2(\phi(t)) = \vec{r}_1(t)$$

Vi sier: ϕ strengt voksende : $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ har samme orientering

— " — avtagende : — " — motsatt — " —

orientering sier noe om hvilken vei kurven gjennomløpes.



eks. på samme orientering.

Setning 3.3.3: $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$ oppfyller kjente regneregler,

som $\int_{\mathcal{C}} f\,ds + \int_{\mathcal{C}} g\,ds = \int_{\mathcal{C}} (f+g)\,ds$

Eksempel: La $\mathcal{C}$ være skjæringskurven mellom planene

$$x + 3y + 4z = 1, \quad \text{og} \quad 4x + 3y + z = 1,$$

som er i første oktant $(x,y,z \geq 0)$

Finn $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$, der $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$

Løsning:

$$\begin{aligned} x + 3y + 4z &= 1 \quad \cdot(-4) \\ 4x + 3y + z &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad -9y - 15z = -3$$

$$y = \frac{1}{3} - \frac{5}{3}z \quad (\geq 0 \text{ når } z \in (0, \tfrac{1}{5})$$

En parametring:

$$\vec{r}(z) = \left(z, \tfrac{1}{3} - \tfrac{5}{3}z, z\right), \quad 0 \le z \le \tfrac{1}{5}$$

$x = 1 - 3y - 4z =$
$= 1 - 3\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{5}{3}z\right) - 4z$
$= z$

$\tfrac{1}{3} - \tfrac{5}{3}z \ge 0$

$\tfrac{5}{3}z \le \tfrac{1}{3}$

$z \le \tfrac{1}{5}$

$z = 0: (0, \tfrac{1}{3}, 0)$

$z = \tfrac{1}{5}: (\tfrac{1}{5}, 0, \tfrac{1}{5})$

$$\vec{r}'(z) = \left(1, -\tfrac{5}{3}, 1\right) = \vec{v}(t)$$

$$v(z) = \sqrt{1 + \tfrac{25}{9} + 1} = \frac{\sqrt{43}}{3}$$

$$f(\vec{r}(z)) = x^3 + y^3 + z^3 = z^3 + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{5}{3}z\right)^3 + z^3$$

$$\int_C f\,ds = \int_0^{1/5} \left(z^3 + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{5}{3}z\right)^3 + z^3\right) \frac{\sqrt{43}}{3}\,dz$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}z^4 - \tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{5}{3}z\right)^4\right]_0^{1/5} \frac{\sqrt{43}}{3}$$

$$= \cdots \approx 0.0058.$$

Seksjon 3.4 Linjeintegraler for vektorfelt

Def 3.4.1: Anta $\vec{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ er stykkevis glatt parametrisering av en orientert kurve i $\mathbb{R}^n$, og at $\vec{F}(x_1, \dots, x_n)$ er et vektorfelt langs C.
Linjeintegralet av $\vec{F}$ langs C er definert ved

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\,dt \qquad (*)$$

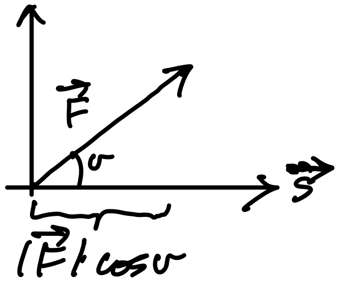
Kalles også arbeidet utført av $\vec{F}$ langs C.

Fra fysikk:

Arbeidet en kraft $\vec{F}$ utfører når man flytter en gjenstand strekning s, er

$W = |\vec{F}| s$ hvis kraften peker i bevegelsesretn.

$W = |\vec{F}| \cos v |\vec{s}|$ — " — ikke peker — " —



$$\vec F \cdot \vec s$$

$$\underbrace{\vec F(\vec r(t_i)) \qquad \vec r\,'(t_i)\Delta t}_{\text{ser i } (*)}$$

Setning 3.4.5: $\int_C \vec F \cdot d\vec r$ skifter fortegn hvis vi bytter til en parametrisering med motsatt orientering.

Eksempel: Hvilket arbeid gjør kraften $\vec F(x,y,z) = (2,1,0)$ langs kurven parametrisert ved $\vec r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Løsning:

$$\vec F(\vec r(t)) = (2,1,0)$$
$$\vec r\,'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$
$$\vec F(\vec r(t)) \cdot \vec r\,'(t) = (2,1,0)\cdot(-\sin t, \cos t, 1)$$
$$= -2\sin t + \cos t$$

$$\int_C \vec F \cdot d\vec r = \int_0^{2\pi} (-2\sin t + \cos t)\,dt = 0$$

Det vil si: Arbeidene vil kansellere hverandre.

Eksempel 3.4.6 Arbeid utført av en kraft = endring i kinetisk energi:

$$W = \int_C \vec F \cdot d\vec r \overset{\text{2. Newton}}{=} \int_C m\vec a \cdot d\vec r = \int_a^b m\vec a \cdot \vec v\, dt$$

Siden $v(t)^2 = \vec v(t)\cdot \vec v(t)$, så er $(v(t)^2)' = \vec v\,' \cdot \vec v + \vec v \cdot \vec v\,'$
$= 2\vec a(t)\cdot \vec v(t)$

så er $\frac{1}{2}(v(t)^2)$ er en antiderivert til $\vec v \cdot \vec a$.

Vi får: $m\int_a^b \vec{a}\cdot\vec{v}\,dt = m\left[\frac{1}{2}v(t)^2\right]_a^b = \frac{1}{2}m\left(v(b)^2 - v(a)^2\right)$

$=$ endring i kinetisk energi.