Seksjon 3.5: Gradienter og konservative felt

Anta $\phi(x_1, \dots, x_n)$ er et skalarfelt i n variable.

Vektorfeltet $\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right)$ kalles gradienten til ϕ.

Hvis $\vec{F}(\vec{x}) = \nabla\phi(\vec{x})$ for en ϕ, og for alle $\vec{x}$ (i def. mengden A)

så sier vi at ϕ er en potensialfunksjon for $\vec{F}$.

Hvis $\vec{F}$ har en potensialfunksjon, så sier vi at $\vec{F}$ er konservativt.

Teorem 3.5.7 Anta $\vec{F}$ har kont. part. der. i A, og at A er åpent og enkeltsammenhengende (sammenhengde, og "uten huller").

Da gjelder: $\vec{F}$ konservativ $\Leftrightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$

Bevis: $\Rightarrow$: Hvis $\vec{F} = \nabla\phi$ så er

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_i}$$

$\parallel$ Vi vet dette.

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j} \quad \blacksquare$$

$\Leftarrow$: Hopper over.

Setning 3.5.1 Anta $\phi : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, at $\nabla\phi$ er kontinuerlig, og $\vec{r} : [a,b] \to A$ er en stykkevis glatt parametrisering av en kurve $\mathcal{C}$. Da er

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a))$$

Bevis: Vi antar for enkelhets skyld: $\vec{r}$: deriverbar over alt, og består av ett segment kun.

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\vec{r} \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \nabla\phi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

$$\overset{\text{kjerneregel}}{=} \int_a^b \left(\phi(\vec{r}(t))\right)' \, dt$$

$$\overset{\text{analysens fund. teorem}}{=} \left[\phi(\vec{r}(t)) \right]_a^b$$

$$= \phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a)) \quad \blacksquare$$

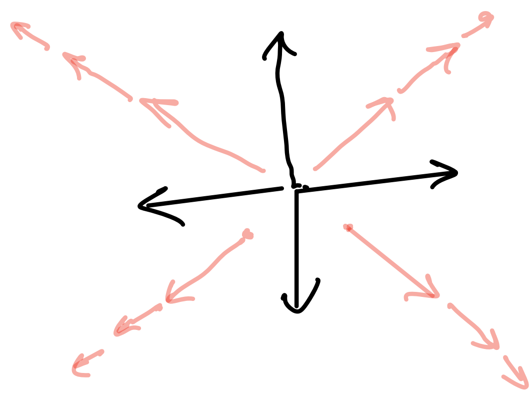
Eksempel 1: Vis at $\vec{F}(\vec{x}) = \dfrac{k\vec{x}}{|\vec{x}|^2}$ er konservativt, og har potensialfunksjon $\Phi(\vec{x}) = k \ln |\vec{x}|$.

Løsning: $\phi(\vec{x}) = k \ln \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = k \ln (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{k}{2} \ln(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{k}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2} x_i}{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \frac{k x_i}{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \frac{k x_i}{|\vec{x}|^2}$$

Det følger at $\nabla \phi(\vec{x}) = \dfrac{k \vec{x}}{|\vec{x}|^2} = \vec{F}(\vec{x})$

Derfor er $\vec{F}$ konservativt.



Eksempel 2 Hvordan finne ϕ i utgangspunktet, uten å gjette?

Løsning: En potensialfunksjon må oppfylle $\nabla \phi = \vec{F}$ dvs.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = F_i = \frac{k x_i}{|\vec{x}|^2} = \frac{k x_i}{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

$u = x_1^2 + \cdots + x_n^2$

$du = 2 x_i \, dx_i$

$\frac{1}{2} du = x_i \, dx_i$

integrer m.t.p. x_i:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{k}{2} \ln(x_1^2 + \cdots + x_n^2) + C_i$$

avh. av $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$

Hvis vi setter $C_i = 0$ får vi $\phi(\vec{x}) = \frac{k}{2} \ln(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$

Vi sjekker også at $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial\left(\frac{kx_i}{x_1^2+\dots+x_n^2}\right)}{\partial x_j} = kx_i\left(-\frac{1\cdot 2x_j}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^2}\right) = \frac{-2kx_ix_j}{|\vec{x}|^4}$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial\left(\frac{kx_j}{x_1^2+\dots+x_n^2}\right)}{\partial x_i} = kx_j\left(-\frac{2x_i}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^2}\right) = \frac{-2kx_ix_j}{|\vec{x}|^4},$$

slik at disse blir like.

Eksempel: Quiz kap. 3 del 2, spørsmål 2 glemt

Finn en potensialfunksjon for $\vec{F}(x,y,z) = (yz+y, xz+x, xy)$

Løsning: Vi må ha:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = yz+y \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = xz+x \qquad \frac{\partial\phi}{\partial z} = xy$$

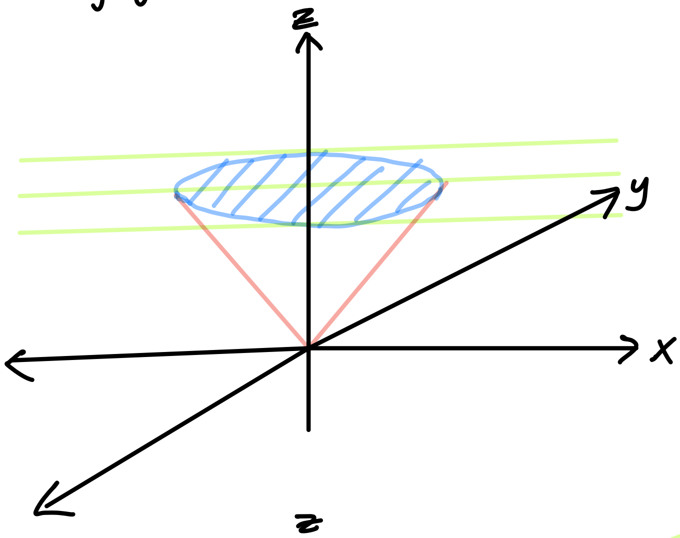
$\Downarrow$ int. m.t.p. x $\qquad$ $\Downarrow$ int. m.t.p. y $\qquad$ $\Downarrow$ int. m.t.p. z

$$\phi(x,y,z) = xyz + xy + \underbrace{C_1(y,z)}_{0} \qquad \phi(x,y,z) = xyz + xy + \underbrace{C_2(x,z)}_{0} \qquad \phi(x,y,z) = xyz + \underbrace{C_3(x,y)}_{xy}$$

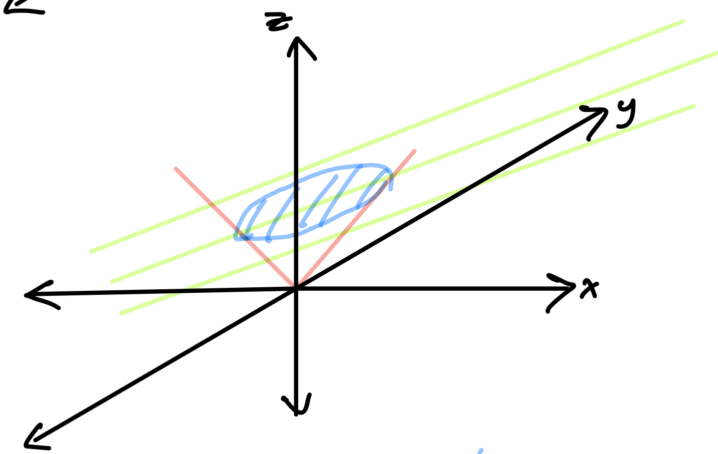
$$\phi(x,y,z) = \underbrace{xyz + xy}_{\text{riktig svar}}$$

Seksjon 3.6

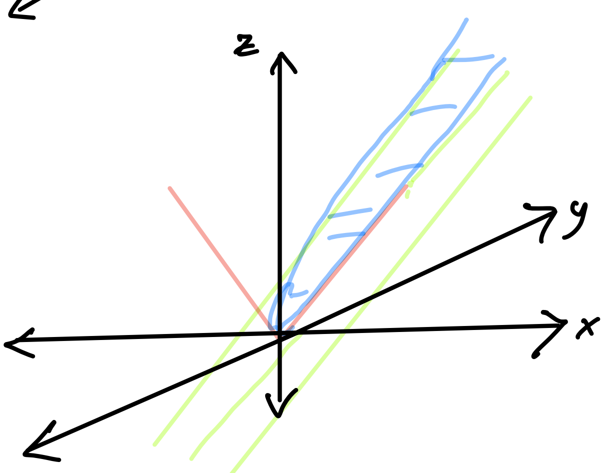
Kjeglesnitt er snittkurver mellom plan og kjegler i rommet



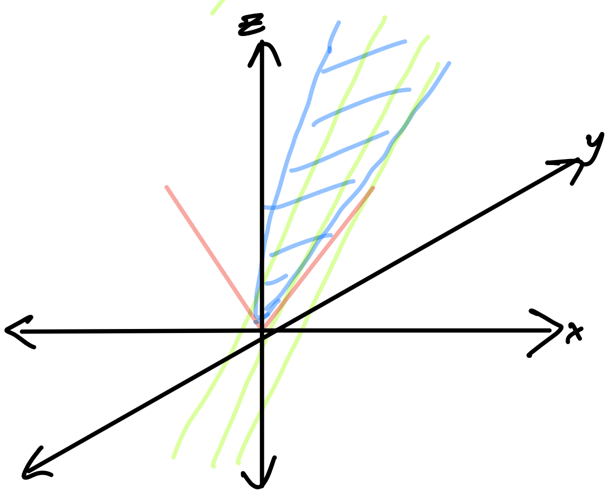
a) Flatt plan (sirkel



b) Slakt plan (ellipse



c) Plan parallelt med kjeglen
(parabel)



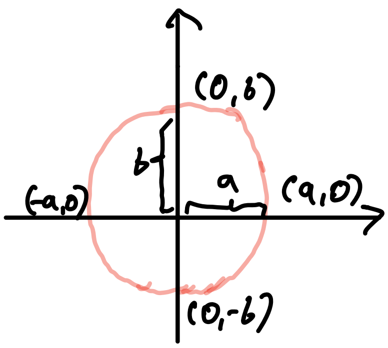
d) Enda brattere plan
(hyperbel)

Standardligninger for kjeglesnitt

Ellipser:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a og b kalles halvakser (den største kalles store halvakse.



Parametrisering $\vec{r}(t) = (a\cos t, b\sin t)$

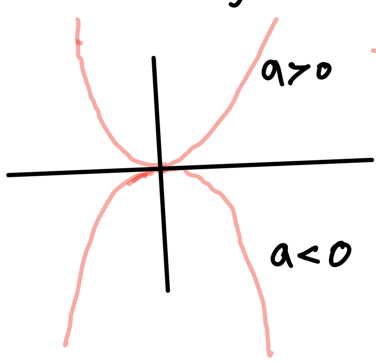
$0 \le t \le 2\pi$.

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2\sin^2 t}{b^2} = \right.$$

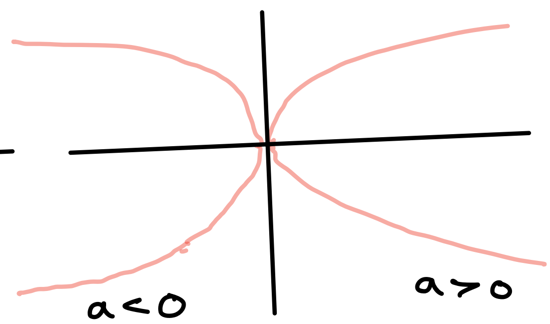
$$= \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Standardlikning for parabel:

$x^2 = 4ay$



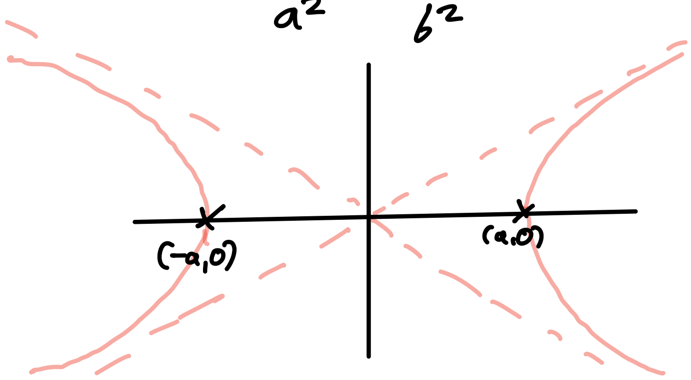
$y^2 = 4ax$



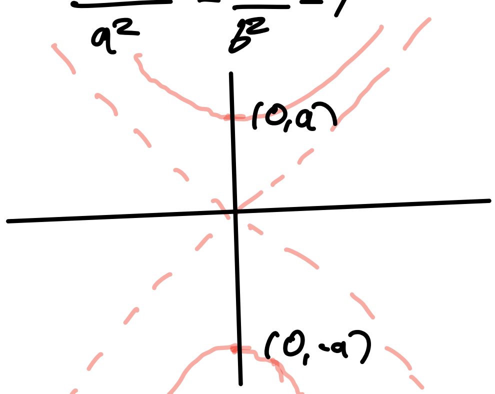
$|a|$ kalles brennvidde.

Standardlikningen for en hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$y=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$$

Parametrisering: $\vec{r}(t)=(a\cosh t,\ b\sinh t)$

(siden $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$)

Hvorfor har hyperbler asymptoter?

$$\lim_{x\to\infty}\left(b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}-\frac{b}{a}x\right)$$

$$=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)$$

$$=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)}{\sqrt{x^2-a^2}+x}$$

$$=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-a^2-x^2}{\underbrace{\sqrt{x^2-a^2}+x}_{\to\infty}}=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0.$$

Eksempel 1

$$\frac{x^2}{\underbrace{2^2}_{a=2}}-\frac{y^2}{\underbrace{4^2}_{b=4}}=1 \qquad \left(\text{sml. med } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\right)$$

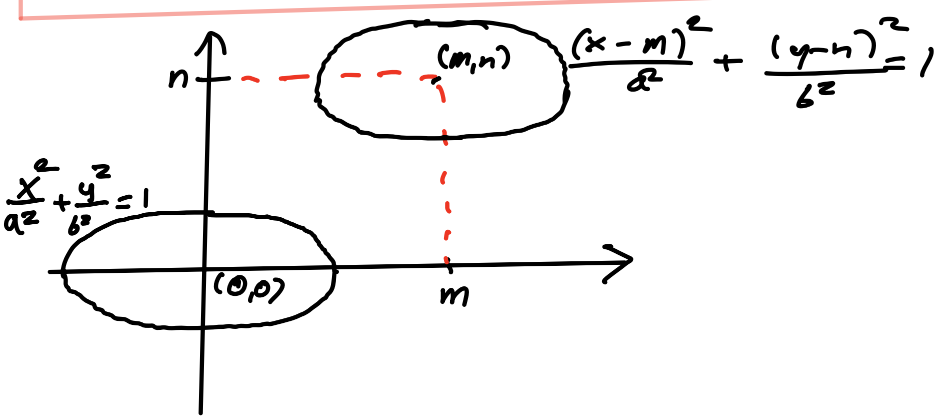
Asymptotene blir $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{4}{2}x=\underline{\underline{\pm 2x}}$

Translaterte varianter av standardligningene

Ellipse: $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ $\qquad$ (m,n) sentrum.

Parabel: $(x-m)^2=4a(y-n)$ og $(y-n)^2=4a(x-m)$

Hyperbel: $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ og $\frac{(y-n)^2}{a^2}-\frac{(x-m)^2}{b^2}=1$



Eksempel 2 Hvilket kjeglesnitt er beskrevet ved

$$4x^2 + y^2 + 2y + 8x - 4 = 0$$

Løsning: Fullføre kvadratene!

$$4x^2 + 8x + y^2 + 2y = 4$$

$$4(x^2+2x+1) + y^2+2y+1 = 4+4+1$$

$$4(x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$$

$$\frac{(x+1)^2}{9/4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{(3/2)^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1$$

$x+1 = x-m \Rightarrow m=-1$

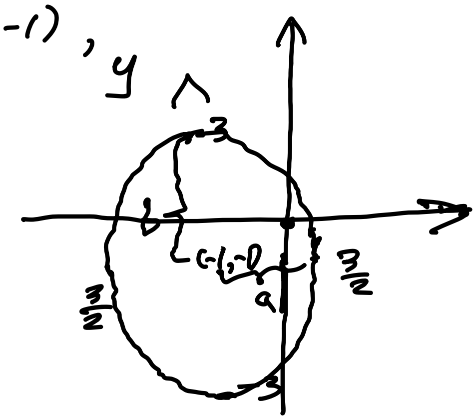
$y+1 = y-n \Rightarrow n=-1$

Dette er en ellipse med sentrum $(-1,-1)$,

halvakser $\frac{3}{2}$ og $3 = b$

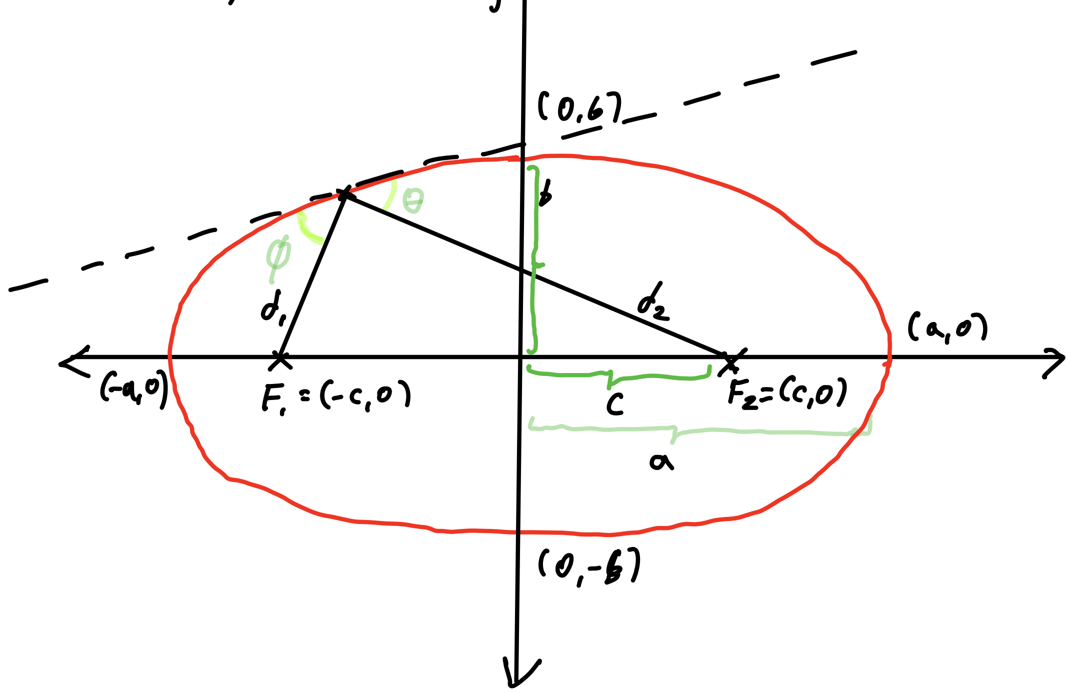
a= store halvakse

$$(-1,-1) \pm \left(\frac{3}{2}, 3\right)$$



Geometriske egenskaper for en ellipse :

Ellipse med $a>0$, sentrum i origo

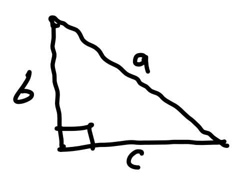


1. En ellipse består av alle punkter s.a. $d_1+d_2=2a$

   $c=\sqrt{a^2-b^2}$ kalles for brennvidde

   $F_1=(-c,0)$, $F_2=(c,0)$ kalles brennpunkter

   Kan tegnes med en blyant: Fest tråd i blyant, og tråd i F_1 og F_2.



2. Vi har at $\phi=\theta$ (refleksjonsegenskap.

Eksempel 2 forts

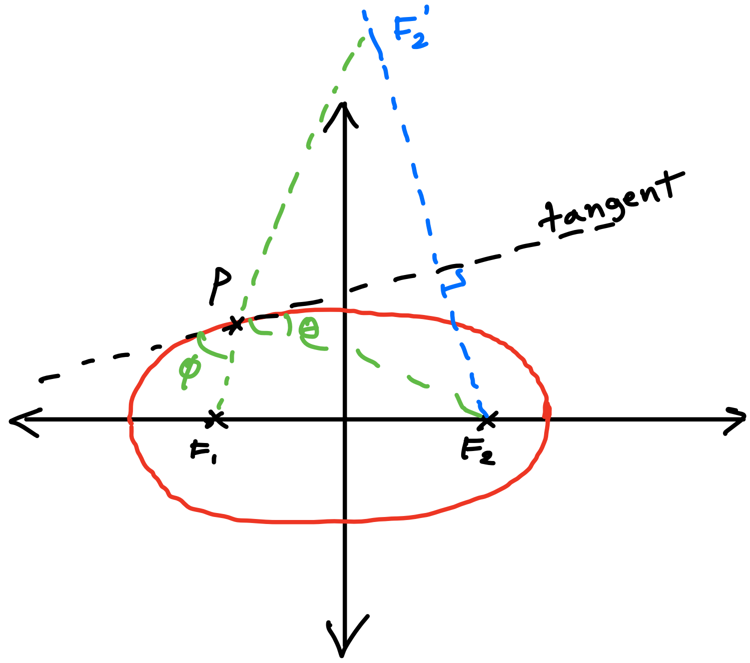
Fant her en ellipse med sentrum $(-1,-1)$, store halvakse $=3$, lille halvakse $=3/2$

brennvidde: $\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{27}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

Brennpunkter: $(m,n)\pm(0,c)=(-1,-1)\pm(0,\frac{3}{2}\sqrt{3})=(-1,-1\pm\frac{3}{2}\sqrt{3})$

NB: siden her er $a<b$

Bevis refleksjonsegenskapen til ellipser.



F_2' er F_2 speilet om tangenten

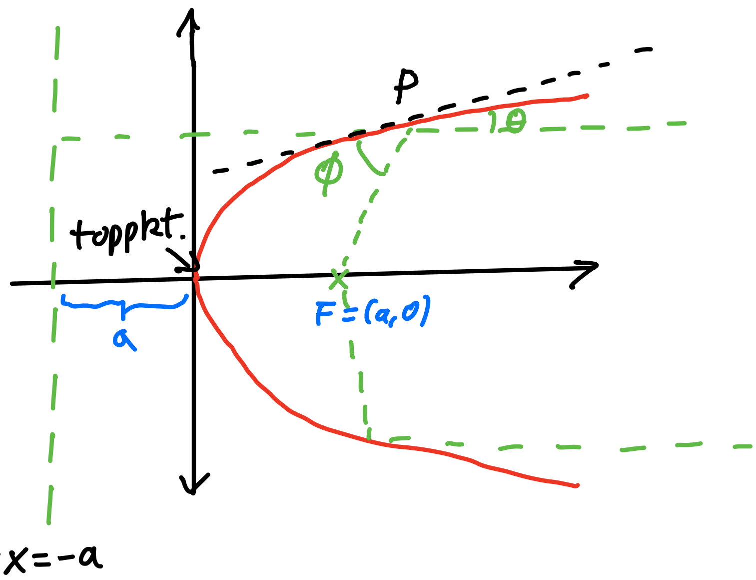
1. Ser at punktet P er det punktet på tangenten med kortest avstand fra F_1 til F_2 via tangenten.

2. Korteste avstand fra F_1 til F_2' er en rett linje.

skjer når $\phi = \theta$

ser og at $|PF_2| = |PF_2'|$.

Geometriske egenskaper for en parabel



F : Brennpunkt

a : Brennvidde

Her er (0,0) toppunkt

l: Styrelinje

1. En parabel består av alle punkter som er like langt fra styrelinjen l, som fra $F=(a,0)$.
2. $\phi = \theta$ (refleksjonsegenskap)

Fra geometrisk egenskap kan man utlede standardlikning.

Egenskap 1. sier at $|PF| = |Pl|$

Vi har $|PF| = |(x,y)-(a,0)| = |(x-a,y)| = \sqrt{(x-a)^2+y^2}$

$|Pl| = |x-(-a)| = |x+a|$

Vi har $|PF| = |Pl|$ når $\sqrt{(x-a)^2+y^2} = |x+a|$

$$(x-a)^2+y^2 = (x+a)^2$$

$$\cancel{x^2}-2ax+\cancel{a^2}+y^2 = \cancel{x^2}+2ax+\cancel{a^2}$$

$$y^2 = 4ax,$$

som er standardligningen for en parabel.

Eksempel 3 Hva er ligningen for en parabel med brennpunkt $(4,0)$, styrelinje $x=-6$

Løsning: Toppunktet er like langt fra styrelinjen og F:

$$\frac{-6+4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Toppunktet er derfor $(-1,0) = (m,n)$

$$\text{brennvidde} = \overset{\text{brennpunkt}}{4} - \overset{\text{topp}}{(-1)} = 5 = a$$

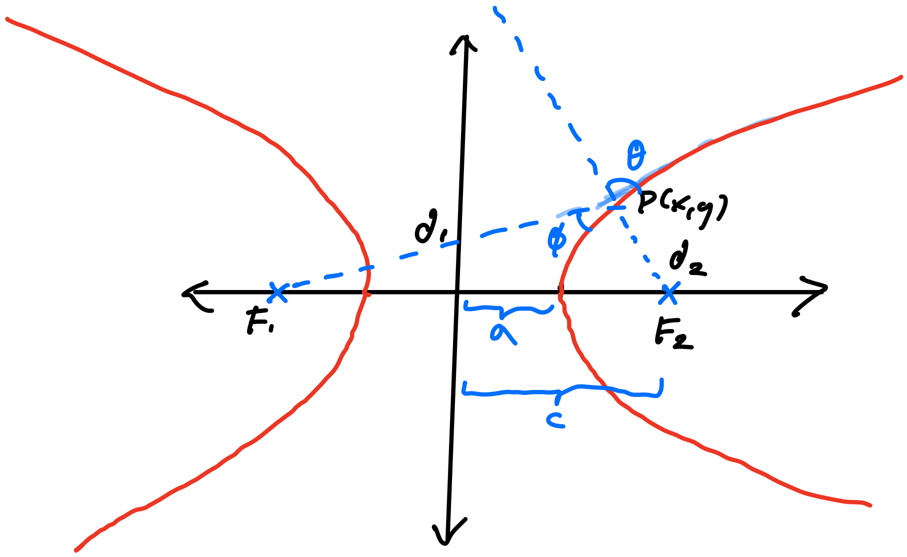
Likningen blir

$$(y-n)^2 = 4a(x-m)$$

$$(y-0)^2 = 4 \cdot 5(x-(-1))$$

$$\underline{y^2 = 20(x+1)}$$

Geometriske egenskaper for en hyperbel



1) En hyperbel består av alle punkter P slik at $|d_1 - d_2| = 2a$.
c kalles brennvidde, F_1, F_2 brennpunkter ($F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$).

2) $\phi = \theta$ (refleksjonsegenskap).
Vi har $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, der a, b kommer fra standardlikningen
$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right)$