Seksjon 3.7: Grafisk fremstilling av skalarfelt

For å tegne et skalarfelt $f(x,y)$:

1. Lag et grid av (x,y)-verdier med kommandoen meshgrid
2. Tegn nivåkurvene til f: $N_c = \{(x,y) : f(x,y) = c\}$
3. Tegn tverrsnittene til f: Skjæring med plan parallelle med xz-planet eller yz-planet.

Eksempel 1: Skalarfeltet $f(x,y) = \frac{(x+1)^2}{(3/2)^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2}$

har ellipsen $\frac{(x+1)^2}{(3/2)^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1$ som nivåkurve (sett $c=1$)

Andre nivåkurver: $\frac{(x+1)^2}{(3/2)^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} = c$

kan skrives $\frac{(x+1)^2}{(\frac{3}{2}\sqrt{c})^2} + \frac{(y+1)^2}{(3\sqrt{c})^2} = 1$

Dette er en ellipse med samme form (halvakser $\frac{3}{2}\sqrt{c}$, $3\sqrt{c}$).

f kalles også for en ellipsoide

Tverrsnitt: $x = c$: $z = \frac{(c+1)^2}{(3/2)^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} \Rightarrow z - \frac{(c+1)^2}{(3/2)^2} = \frac{(y+1)^2}{3^2}$

$y = c$: $z = \frac{(x+1)^2}{(3/2)^2} + \frac{(c+1)^2}{3^2} \Rightarrow z - \frac{(c+1)^2}{3^2} = \frac{(x+1)^2}{(3/2)^2}$.

Begge tverrsnitt er parabler.

Eksempel 2 $\quad f(x,y,z) = \frac{(x+1)^2}{(3/2)^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} - z$

Nivåflater: $\frac{(x+1)^2}{(3/2)^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} - z = c$

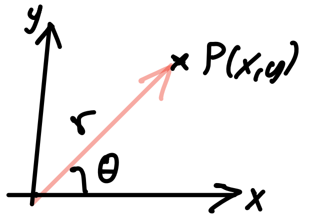
$$\Downarrow$$

$$z = \frac{(x+1)^2}{(3/2)^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} - c$$

sett $c=0$: Da får vi $z = \frac{(x+1)^2}{(3/2)^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2}$, som er ellipsoiden fra eksempel 1

Bruke andre koordinatsystemer til plotting

Polarkoordinater



polar → kart.

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

kart. → polar

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$

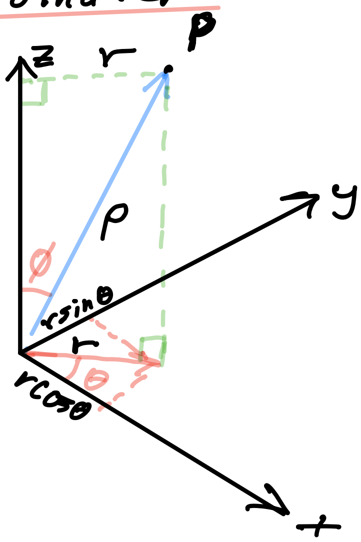
$\sin\theta = \frac{y}{r}$

Eksempel 3 Paraboloiden $f(x,y) = \underbrace{x^2+y^2}_{r^2}$ er i polarkoordinater $g(r,\theta) = r^2$

I rommet kalles r, θ, z for sylinderkoordinater.

plotter i rommet som $(r\cos\theta, r\sin\theta, r^2)$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le 2$:

Kulekoordinater (ϕ, θ, ρ)



$r = \rho\sin\phi$

$z = \rho\cos\phi$

kule → kart.

$x = r\cos\theta = \rho\sin\phi\cos\theta$

$y = r\sin\theta = \rho\sin\phi\sin\theta$

$z = \rho\cos\phi$

kart → kule :

$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\cos\phi = \frac{z}{\rho}$, $0 \le \phi \le \pi$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

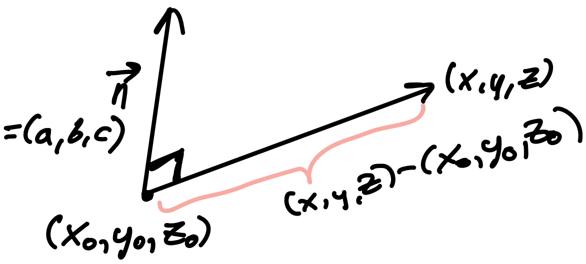
Eksempel 4 $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ gir nivåflater som er kuleskall

(kule med radius ρ: $x^2+y^2+z^2 = \rho^2$)

plotte halvkule med $\rho = 2$:

$(2\sin\phi\cos\theta, 2\sin\phi\sin\theta, 2\cos\phi)$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$

Tangentplan og normalvektor



(x,y,z) ligger i planet gjennom (x_0,y_0,z_0), og med normalvektor $\vec{n}$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{n}\cdot\big((x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\big)=0$$
$$\Updownarrow$$
$$(a,b,c)\cdot(x-x_0,\,y-y_0,\,z-z_0)=0$$
$$\Updownarrow$$
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$ax+by+cz=\underbrace{ax_0+by_0+cz_0}_{\text{konstant.}}$$

Derfor: $f(x,y,z)=ax+by+cz$ har nivåflater som er parallelle plan, som alle er normalt på $\nabla f=(a,b,c)$

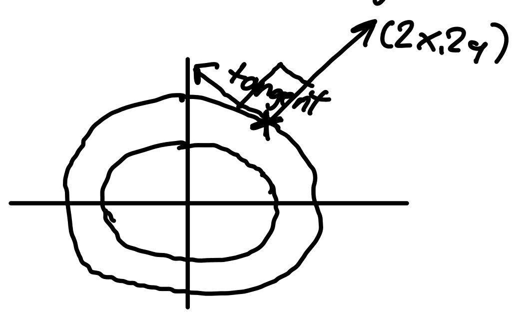
Setning 3.7.8 sier at dette også gjelder mer generelt:

(tangenten til) nivåkurvene til en mer generell f står normalt på gradienten.

$f(x,y)=x^2+y^2$

$\nabla f=(2x,2y)$

for paraboloide:



Husk at lineariseringen av $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ i $\vec{a}=(x_0,y_0)$ var

$$T_{\vec{a}}f(x,y)=\underbrace{f(x_0,y_0)}_{\vec{F}(\vec{a})}+\underbrace{\nabla f(x_0,y_0)^T}_{\vec{F}'(\vec{a})}(\vec{x}-\vec{a})$$

$$=f(x_0,y_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\;\;\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}$$

$$=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Tangentplanet er grafen til lineariseringen:

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

~~flytter~~ flytt over:

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + z = \text{konstant}$$

Derfor: $\vec{n} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), 1\right)$ er normalvektor for tangentplanet til f.

(se def. 3.7.9)

Seksjon 3.8 Grafisk fremstilling av vektorfelt

Anta: $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

quiver $(\underbrace{x, y, u, v}_{4 \text{ vektorer}})$ tegner i hvert punkt $\underbrace{(x_i, y_i)}_{\vec{x}}$ vektoren $\underbrace{(u_i, v_i)}_{\vec{F}(\vec{x})}$

quiver3: Tilsvarende for $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(\underbrace{x, y, z, u, v, w}_{6 \text{ vektorer}})$

Vi plotter $\vec{F}(\vec{x}) = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$

Mulig tolkning av $\vec{F}$: Peker i den retning som en væske strømmer. Væsken følger det som kalles en strømningslinje

streamline i Matlab / Python.