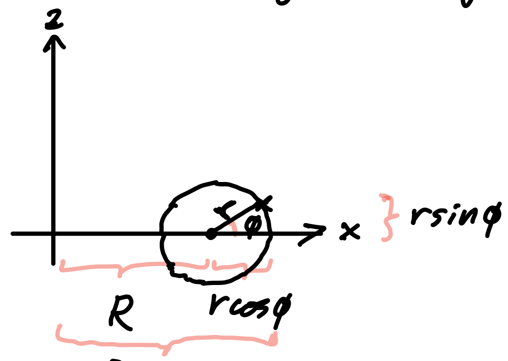
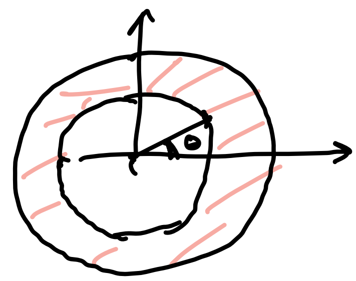
Seksjon 3.9 Parametriserte flater

Hvordan kan man plotte en torus (smultring)?

Denne har en indre og en ytre radius:





La oss sette $R=3$, $r=1$

Torus er parametrisert ved

$$\left((3+\cos\phi)\cos\theta,\ (3+\cos\phi)\sin\theta,\ \sin\phi \right)$$

Kap. 4 Linear algebra i $\mathbb{R}^n$

Hvordan løse et system med m likninger og n ukjente?

Likningsform

$$\underbrace{\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}}$$

Kan skrives som matriseligning

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{pmatrix}$$

matriseform

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)}$$

kalles også utvidet matrise, skriver $(A\ \vec{b})$ for denne.

Vi forsøker å løse systemet ved hjelp av 3 typer radoperasjoner

(i) Bytte om to rader

(ii) Gange en rad med et tall $\neq 0$

(iii) Legge en rad ganget med et tall til en annen rad.

Idé: Bruk (i)–(iii) flere ganger, slik at vi til slutt ~~får~~ en "trapp" med enere i "hjørnene":

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & b_1' \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & b_2' \\ & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & b_m' \end{pmatrix} \quad (*)$$

Likningsformen for dette er:

$$\left.\begin{aligned} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0x_3 + \cdots &= b_1' \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + \cdots &= b_2' \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &\Rightarrow x_1 = b_1' \\ &\Rightarrow x_2 = b_2' \\ &\quad\vdots \\ &\quad x_n = b_n' \end{aligned}$$

Vi har dermed løst systemet!

A og B kalles radekvivalente hvis B kan fås fra A ved hjelp av operasjonene (i)–(iii). Vi skriver da $A \sim B$

Vi skriver og $A \overset{I \leftrightarrow II}{\sim} B$ hvis B kan fås ~~fra~~ A ved å bytte om rad 1 og 2 (operasjon (i))

Vi kaller også (*) for redusert trappeform

Å bringe en matrise på en slik form ved hjelp av (i)–(iii) kalles også for Gausseliminasjon.

Eksempel

Likningsform

$$\begin{array}{l} \\ II - 2I \\ III - 3I \end{array} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 8 \\ 3x_1 - 8x_2 \qquad = 6 \end{cases}$$

Matriseform

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 8 \\ 3 & -8 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underset{\sim}{II - 2I,\ III - 3I}$$

$$\text{III} + 2\,\text{II} \quad \left\{\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -2x_2 - 3x_3 &= -3 \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \text{I} - \text{III} \\ \text{II} - 2\,\text{III} \end{matrix} \quad \left\{\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (**)$$

$$\text{I} + 2\,\text{II} \quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 \quad &= 2 \\ x_2 \quad &= 0 \\ x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad &= 2 \\ x_2 \quad &= 0 \\ x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

kalles for ledende enere.

Derfor er løsningen: $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1$.

Merk:

1. Vi fikk en unik løsning.
2. Søyle 1-3 har ledende enere. Disse kalles pivotsøyler. Søyle 4 er ikke en pivotsøyle.
3. Rad 1-3 har ledende enere. Disse kalles pivotrader.
4. Systemet kan løses på mange forskjellige måter.

Når vi bringer en matrise på redusert trappeform $(*)$, så var vi innom $(*)$, der vi har:

(i) enhver rad har en første ikke-null som en ener. (eller raden er bare nuller)

(ii) Enhver rad med ikke bare nuller, begynner med minst en null mer enn raden over.

Hvis (i)-(ii) er oppfylt sier vi at matrisen er på trappeform, og matrisen kalles en trappematriso.

Enhver matrise er radekvivalent med en på trappeform.