Sek 4.2 Forts

Eksempel 1 fra sist: 3 likninger med 3 ukjente med unik løsning.
Definerte trappeform og redusert trappeform:

Trappeform:

(i) Første ikke-null i enhver rad er en ener

(ii) Enhver rad begynner med minst en null mer enn raden over.

Redusert trappeform: (i) – (ii), og i tillegg:

(iii) alle elementene i pivotsøylene er 0, utenom pivotelementene.

Eksempel 2:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 \qquad - x_3 &= 2 \end{aligned}\right\} \text{likningsform}$$

$II - 2I$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	} matriseform
$II \cdot (-\frac{1}{2})$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -6 \end{pmatrix}$	
$I - II$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$	trappeform!
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$	redusert trappeform

På likningsform:
$$\left.\begin{aligned} x_1 \qquad - \tfrac{1}{2}x_3 &= 1 \\ x_2 + \tfrac{3}{2}x_3 &= 3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}x_3 + 1 \\ x_2 &= -\tfrac{3}{2}x_3 + 3 \end{aligned}$$

x_1, x_2 kalles basisvariable (svarer til søyler med ledende enere)

x_3 kalles fri variabel (svarer til søyle uten ledende ener)

Merk:
1. Siden x_3 kan velges fritt, så har systemet uendelig mange løsninger
2. Begge radene er pivotrader
3. Søyle 1 og 2 er pivotsøyler, men ikke søyle 3 og 4.

Eksempel 3

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 5 \end{aligned}$$

trappeform   redusert trappeform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \overset{II-3I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{II\cdot(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{I-2II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

På likningsform:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ \underbrace{0\cdot x_1 + 0\cdot x_2}_{0} &= 1 \end{aligned}$$

Merk:
1. Systemet har ingen løsninger
2. Begge radene er pivotrader
3. søyle 1 og 3 er pivotsøyler, men ikke søyle 2.

	Eks.1	Eks.2	Eks.3
$(A\ \vec{b})$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 8 \\ 3 & -8 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
redusert trappeform	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Løsninger	En unik	Uendelig mange	Ingen
pivotrader	alle	alle	alle
pivotsøyler	alle untatt siste	alle untatt to siste	første og siste

Overbevis deg om: Enhver matrise er radekvivalent med en på redusert trappeform.

Den reduserte trappe formen er unik, og kan fås i Matlab med rref – kommandoen.

Setning 4.2.8 Hva kan vi lese ut fra pivotsøylene?

Anta at vi radreduserer $(A\ \vec{b})$ til en trappematrise.

(i) Dersom siste søyle er en pivotsøyle, så har ikke systemet noen løsning (se eks. 3)

Dersom siste søyle ikke er en pivotsøyle:

(ii) Hvis alle andre søyler er pivotsøyler, så har systemet en unik løsning. (se eks.1)

(iii) Hvis minst en av de andre søylene ikke er pivotsøyler, så har systemet uendelig mange løsninger (se eks. 2)

En søyle uten pivotelement gir opphav til en fri variabel

Setning: Hva kan vi lese ut fra pivotradene?

Anta at D er (den reduserte) trappeformen til matrisen A.

(i) $A\vec{x} = \vec{b}$ har en løsning for alle høyresider $\vec{b}$ hvis og bare hvis alle radene i D er pivotrader (se eks 1 og 2, men ikke eks 3)

(ii) $A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig løsning for alle høyresider $\vec{b}$ hvis og bare hvis alle radene og søylene i D har pivotelementer (se eks. 1, men ikke eks. 2, eks. 3

Merk: Kun kvadratiske systemer kan ha entydig løsning for alle $\vec{b}$, og da er redusert trappeform til A lik I_n.

Delvis bevis: Anta at rad nr. i ikke er en pivotrad.

Se på $(D \quad \vec{e}_i)$. Her er siste søyle en pivotsøyle, slik at systemet ikke har noen løsning.

Du kan nå ta $(D \quad \vec{e}_i)$, og gjøre baklengs radreduksjon.

Vi får da $(A \quad \vec{c})$, og $Ax = \vec{c}$ har ingen løsning

$A\vec{x} = \vec{b}$ kalles også for en matriselikning.

Hvis $\vec{b} = \vec{0}$ kalles systemet homogent. Hvis $\vec{b} \neq 0$ kalles det inhomogent.

Merk: Ethvert homogent system har alltid $\vec{x} = \vec{0}$ som en løsning.

Fra setning 4.2.8: Den er unik hvis alle søylene i A er pivotsøyler.

Setning: Hvis $\vec{b} \neq \vec{0}$, og $\vec{x}_p$ er en konkret løsning av $A\vec{x} = \vec{b}$:
Alle andre løsninger $\vec{x}$ av $A\vec{x} = \vec{b}$ kan skrives $\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$, der $\vec{x}_h$ løser det homogene systemet.

Bevis: Skriv $\vec{x} = (\vec{x} - \vec{x}_p) + \vec{x}_p$.
Da er $A(\vec{x} - \vec{x}_p) = A\vec{x} - A\vec{x}_p = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$, slik at $\vec{x}_h = \vec{x} - \vec{x}_p$ løser det homogene systemet, og $\vec{x} = \vec{x}_h + \vec{x}_p$

Man kan løse systemer med samme matrise A ($A\vec{x}_1 = \vec{b}_1$, $A\vec{x}_2 = \vec{b}_2$, ...), simultant:

$A\vec{x}_1 = \vec{b}_1$: $\quad \underset{\text{utv. matrise}}{(A, \vec{b}_1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} \end{pmatrix} \sim \cdots\cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_{11} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \tilde{b}_{m1} \end{pmatrix}$

$A\vec{x}_2 = \vec{b}_2$: $\quad (A, \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{12} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m2} \end{pmatrix} \underset{\sim \cdots \sim}{\text{samme radops}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_{12} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \tilde{b}_{m2} \end{pmatrix}$

Derfor: $(A, \vec{b}_1, \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & b_{m2} \end{pmatrix} \underset{\sim \cdots \sim}{\text{samme radops}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \tilde{b}_{m1} & \tilde{b}_{m2} \end{pmatrix}$

$\uparrow \vec{x}_1 \quad \uparrow \vec{x}_2$

De samme radoperasjonene anvendt på $(A, \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ løser derfor både $A\vec{x} = \vec{b}_1$, og $A\vec{x} = \vec{b}_2$.

Eksempel 1 fra sist: I tillegg til $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$, la oss også løse

$$A\vec{x}_2 = \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ og } \quad A\vec{x}_3 = \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 0 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{II-2I}{III-3I}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III+2II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{I-III}{II-2III}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{I} + 2\text{II} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$