Seksjon 4.5 Inverse matriser

Anta A er en $n\times n$-matrise

A^{-1} kalles den inverse matrisen til A hvis $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

Hvis A^{-1} eksisterer så sier vi at A er inverterbar

Merk: 1) Det er ikke sikkert at A^{-1} eksisterer (se på $A = 0$)

2) A^{-1} er unik hvis den eksisterer: Anta både X og Y er inverser.

Da er: $X = I_n X = (YA)X = Y(AX) = YI_n = Y$

3) Med hjelp av A^{-1} kan vi løse systemer:

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \underbrace{A^{-1}(A\vec{x})}_{(A^{-1}A)\vec{x} = I_n\vec{x} = \vec{x}} = A^{-1}\vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Setning 4.5.4 (Karakterisering av inverterbare matriser

Anta A er $n\times n$. Følgende ~~er~~ ekvivalent:

(i) A er inverterbar

(ii) $A\vec{x} = \vec{c}$ har en entydig løsning for alle $\vec{c}$

(iii) A er radekvivalent med I_n

(ii)$\leftrightarrow$(iii): (iii) $\leftrightarrow$ radekv. med $I_n \Leftrightarrow$ pivot i hver søyle / rad
$\Uparrow$
(ii)

(i)$\to$(ii): Her trenger vi et lemma:

Lemma 4.5.2 Hvis A, B er $n\times n$, og $AB = I_n$, ~~så~~ har $A\vec{x} = \vec{c}$ en entydig løsning ~~for~~ alle $\vec{c}$.

Bevis: La $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ være søylene i B. Da er

$$A(\underbrace{c_1\vec{b}_1 + \dots c_n\vec{b}_n}_{\text{min } \vec{x}}) = c_1 A\vec{b}_1 + \dots + c_n A\vec{b}_n$$
$$= c_1\vec{e}_1 + \dots + c_n\vec{e}_n$$
$$= (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$AB = I_n$

$A[\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_n] = I_n$

$A\vec{b}_i = \vec{e}_i$

Det følger at $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + \cdots + c_n\vec{b}_n$ løser $A\vec{x} = \vec{c}$.

Hvorfor er $\vec{x}$ entydig?

$A x = \vec{c}$ har løsning $\Rightarrow$ A har pivot i hver rad

$\Downarrow$ A kvadratisk

A har pivot i hver søyle

$\Downarrow$

$A\vec{x} = \vec{c}$ har entydig løsning. $\blacksquare$

Nå, hvis A er inverterbar så er $\underbrace{A A^{-1}}_{B} = I_n$, og lemmaet sier

da at $A\vec{x} = \vec{c}$ har entydig løsning, slik at (ii) er bevist.

(iii) $\rightarrow$ (i) : Hopper over (bruker setning 4.5.3)

Følger fra beviset: Hvis du radreduserer $(A, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ til

$(I_n, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$, så er $A^{-1} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$

følger fra simultanløsning av likningssystemer.

$A x = \vec{e}_i$

$A\vec{b}_i = \vec{e}_i$

$AB = I_n$

Eksempel 1 igjen: Her var $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -8 & 0 \end{pmatrix}$

fikk i går

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{radops fra tidligere}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 32 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Derfor er $A^{-1} = \begin{pmatrix} 32 & -8 & -5 \\ 12 & -3 & -2 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Seksjon 4.6 Lineærkombinasjoner og basiser

Vi sier at $\vec{b}$ er en lineærkombinasjon av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ hvis det finnes skalarer $x_1, \dots, x_n$ slik at $\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n$ (x_i-ene kalles koeffisienter)

Merk: $A\vec{x} = \vec{b}$ er det samme som at $\vec{b}$ er en lineær kombinasjon av søylene til A ($x_1, \dots, x_n$ er koeffisientene)

Eksempel 1: Vi viste

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 8 \\ 3 & -8 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A} \quad \vec{b} \end{array} \sim \cdots \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \vec{x} \end{array}$$

Derfor er $\vec{b} = x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n$. Dette er det samme som

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{lin. komb. av søylene.}}$$

Spennet $Sp(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ til $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ består av alle vektorer som kan skrives som lineærkombinasjoner av $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.

Merk 1: Hvis $Sp(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \mathbb{R}^m$, så må $n \geq m$:

Da har nemlig $A\vec{x} = \vec{b}$ en løsning for alle $\vec{b}$ $(A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n))$,

og da må alle radene i A være pivotrader, og

m = antall rader = antall pivotrader = antall pivotsøyler $\leq$ antall søyler = n,

slik at $n \geq m$.

Definisjon 4.6.5: $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ kalles lineært uavhengige hvis enhver $\vec{b} \in Sp(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ på en entydig måte.

Ellers kalles $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ lineært avhengige

---

Setning 4.6.6/4.6.7 Følgende er ekvivalent

(i) $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige.

(ii) $x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n = \vec{0} \iff x_1 = \cdots = x_n = 0$

(iii) $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ har bare pivotsøyler

---

Bevis: (i) $\rightarrow$ (ii)

$\Leftarrow$: er lett å se

$\Rightarrow$: Hvis $x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n = \vec{0}$, så er $A\vec{x} = \vec{0}$

Siden $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige, så har $A\vec{x} = \vec{0}$ en entydig løsning. Siden $A\vec{0} = \vec{0}$ så er $\vec{x} = \vec{0}$, slik at $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

(ii)→(iii): (ii) sier at $A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

Det er da ingen frie variable i systemet.

$\Downarrow$

alle søyler i A er pivotsøyler.

(iii)→(i): Når alle søyler er pivotsøyler så har $A\vec{x} = \vec{b}$ alltid en entydig løsning $\Rightarrow \vec{b}$ kan skrives som lin. komb. av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ på entydig måte. Det følger at $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige. ■

Merk2: Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige, så er $n \leq m$:

Siden alle søyler i A er pivotsøyler, så er

n = antall søyler = antall pivotsøyler = antall pivotrader ≤ antall rader = m,

slik at $n \leq m$.

Kombinerer merk1 og merk 2 og får:

Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige og utspenner $\mathbb{R}^m$, så er $m = n$.

Definisjon 4.6.12 En basis for $\mathbb{R}^n$ er en samling vektorer $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ som er lineært uavhengige og utspenner $\mathbb{R}^n$.

Merk: 1) Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er basis for $\mathbb{R}^n$, så er $A \sim I_n$

2) Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige i $\mathbb{R}^n$, eller utspenner $\mathbb{R}^m$, så utgjør en basis.

Spørsmål 1: Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært avhengige, hvordan kan vi finne en delmengde som er lineært uavhengige, og med samme spenn?

Svar: Radreduser $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, og plukk ut $\vec{a}_i$ der søyle i er pivotsøyler.

Eks 2: Her var $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, og søyle 1 og 2 var pivotsøyler.

Derfor er $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lineært uavhengige, og med samme spenn.

Spørsmål 2: Hvordan utvide $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ (vektorer i $\mathbb{R}^m$) til en basis

$$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \underbrace{\vec{a}_{n+1}, \dots, \vec{a}_m}_{\text{nye}} \quad \text{for } \mathbb{R}^n \,?$$

Svar:

1) Radreduser $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ til trappeform
2) "Sett inn" pivotsøyler slik at alle rader er pivotrader
3) Radreduser baklengs for å finne $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \underbrace{\vec{a}_{n+1}, \dots, \vec{a}_m}_{\text{der du satte inn pivotsøyler.}}$

Eksempel Sett $A = \begin{array}{cc} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{II-I \\ III-I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{III\cdot(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{II \leftrightarrow III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{I-II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) Setter inn pivotsøyler: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (manglet pivot i rad 3)

3) Radreduser baklengs:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{I+II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{II \leftrightarrow III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{III\cdot(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{II+I \\ III+I}}{\sim} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vec{a}_1 \;\; \vec{a}_2 \;\; \vec{a}_3 \end{array}$$

$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ er nå en basis for $\mathbb{R}^3$.