Seksjon 4.8

Elementære matriser er matriser som fremkommer ved å gjøre en radoperasjon på I_n

Eksempel 1 $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ er den elementære matrisen som svarer til radoperasjonen $I - 3II$

Merk: 1) Alle radoperasjoner kan reverseres:

operasjon	invers operasjon
$I + II$	$I - II$
$2 \cdot I$	$\frac{1}{2} \cdot I$
$I \leftrightarrow II$	$I \leftrightarrow II$

2) En radoperasjon på en matrise svarer til å gange med den tilsvarende elementære matrise fra venstre.

3) Elementære matriser er inverterbare, og inversen er igjen elementær (svarer til invers radoperasjon)

Eksempel 2 Siden $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \overset{I-3II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, så er

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & -8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{elementær matrise for } I-3II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Setning 4.8.4 En $m \times n$-matrise A kan skrives

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k B$$

der B er den reduserte trappeformen til A, og $E_1, \dots, E_k$ er elementære $m \times m$-matriser.

Bevis: Vi har at $B = \mathrm{rref}(A) = F_k \cdots F_2 F_1 A$ (F_i er elementære)

$$F_k^{-1} B = F_{k-1} \cdots F_2 F_1 A$$

$$\vdots$$

$$F_1^{-1} F_2^{-1} \cdots F_k^{-1} B = A$$

Setter vi nå $E_1 = F_1^{-1}, E_2 = F_2^{-1}, \dots$ (som også er elementære)
får vi $A = E_1 E_2 \cdots E_k B$ $\blacksquare$

Merk: Hvis A er inverterbar så er $B = I_n$, slik at $A = E_1 E_2 \cdots E_k$, så enhver inverterbar matrise er et produkt av elementære matriser.

Eksempel 3 Faktoriser $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ med elementære matriser.

Løsning:
$$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{I \leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \overset{II - 6I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \overset{II \cdot (-\frac{1}{6})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{I - 2II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \quad F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad F_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Derfor: $A = E_1 E_2 E_3 E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.9 Determinanter

Defineres induktivt ved å "utvikle" langs første rad i matrisen:

Eksempel 4

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

determinant

$$= \underbrace{3(0 \cdot 3 - 0 \cdot 4)}_{0} - (1 \cdot 3 - 4 \cdot 2) + \underbrace{2(1 \cdot 0 - 2 \cdot 0)}_{0}$$

$$= -(3 - 8) = \underline{5}$$

Teorem 4.9.10 La A være en kvadratisk matrise

(i) Hvis A er øvre/nedre triangulær (alt over/under diagonalen er 0), så er determinanten lik produktet av diagonalelementene.

(ii) Bytter vi om to rader i A, så ganges determinanten med -1

(iii) Ganger vi en rad i A med et tall $s \neq 0$, så ganges også determinanten med s.

(iv) Hvis en rad ganges med et tall og legges til en annen rad, så endres ikke determinanten

Bevis:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}\end{vmatrix} = a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{nn}\end{vmatrix}}_{\substack{\text{triangulær, ved} \\ \text{induksjon er dette} \\ a_{22}\cdots a_{nn}}} - a_{12}\begin{vmatrix} 0 & a_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & & \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} 0 & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \cdots & \\ 0 & & \end{vmatrix}$$

har nullsøyle, da er determinanten 0, se i boka.

$$= a_{11}(a_{22}\cdots a_{nn}) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(ii)–(iv): Se i boka ■

Spesielt: Hvis E er elementær matrise $\begin{cases}\text{rad ganges med } s \\ \text{radbytte} \\ \text{en rad legges til en annen}\end{cases}$ så er $\det E = \begin{cases} s \\ -1 \\ 1\end{cases}$

(husk at $\det I_n = 1$)

Det følger også at $\det(E_1\cdots E_k A) = \det(E_1)\cdots\det(E_k)\det A$

spesielt har vi at $\det(E_1\cdots E_k) = \det(E_1)\cdots\det(E_k)$.

Eks 3 igjen: Vi fant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$

ganger $\det(A)$ med $\quad (-1) \quad 1 \quad -6 \quad 1$

Derfor er $\det A = (-1)\cdot 1\cdot(-6)\cdot 1 = \underline{6}$

Kontroll: $\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 2\end{vmatrix} = 6\cdot 2 - 6\cdot 1 = 12 - 6 = \underline{6}$

Teorem 4.9.12 Anta A $n\times n$. Følgende er ekvivalent:

(i): $\det(A) \neq 0$
(ii): A er inverterbar
(iii): $A\vec{x} = \vec{b}$ har entydig løsning for alle $\vec{b}$
(iv): $A\vec{x} = \vec{0}$ har kun løsning $\vec{x} = \vec{0}$
(v): Søylene i A er en basis for $\mathbb{R}^n$
(vi): A er radekvivalent med I_n

Bevis: Vi viser (vi) $\Leftrightarrow$ (i):

$$\begin{gathered}\text{(vi)} \\ \Updownarrow \\ \operatorname{rref}(A) = I_n \\ \Updownarrow \\ A \text{ er et produkt av elementære matriser}\end{gathered}$$

$$\Updownarrow$$
$$\det(A) \neq 0$$
$$\Updownarrow$$
(i)

Setning 4.9.16 Anta A, B er $n \times n$-matriser. Da er $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Bevis: Anta A ikke inverterbar: Lemma 4.9.15 i boka sier at da er heller ikke AB inverterbar.

Vi får
$$\det(A)\det(B) = 0 \cdot \det(B) = 0$$
$$\det(AB) = 0$$

Anta A inverterbar: Skriv $A = E_1 \cdots E_k$ $\left(\Rightarrow \det A = \overbrace{\det(E_1)\cdots\det(E_k)}^{\det(E_1 \cdots E_k)}\right)$

$$\det(A)\det(B) = \det(E_1 \cdots E_k)\det B = \det(E_1)\cdots\det(E_k)\det B$$
$$\det(AB) = \det(E_1 \cdots E_k B) = \det(E_1)\cdots\det(E_k)\det(B) \quad \blacksquare$$

Merk 1) Siden $A^{-1}A = I_n$, og siden $\det(I_n) = 1$, så er $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

2) Man kan også utvikle determinanter langs andre rader/søyler (velg rad/søyle med mange nuller):

Eksempel 4 igjen

Langs andresøyle:
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)(1\cdot 3 - 4 \cdot 2) = -(3-8) = 5$$

Langs siste rad:
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 2(4-0) + 3(0-1)$$
$$= 8 - 3 = 5$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$